Chap. II.

GÉOMÉTRIE EN 3D.

1. Modes de repérage d'un point.
   1.1 Coordonnées cartésiennes
   1.2 Coordonnées cylindriques
   1.3 Coordonnées sphériques
2. Droites et plans
   2.1 Représentations diverses de droites
   2.2 Représentations diverses de plans
   2.3 Orthogonalité
3. Distances
   3.1 Distance d'un point à un plan
   3.2 Distance d'un point à une droite
4. Angles
5. Sphères, cylindres, cônes : premiers cas simples.

Annexe . Produits vectoriels, mixtes.

"On ne peut comprendre ce livre immense perpétuellement ouvert devant nos yeux, l'Univers, si l'on n'apprend pas d'abord à connaître la langue et les caractères dans lesquels il est écrit : il est écrit en langue mathématique et ses caractères sont des figures géométriques sans l'intermédiaire desquelles il est impossible d'en comprendre un mot."

GALILÉE

Dans tout ce chapitre, l'espace euclidien (3D) est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$; une orientation est choisie, de sorte que $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ soit direct.
Le plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est aussi noté (Oxy) et appelé "plan des x,y"
Idem pour les 2 autres plans de coordonnées.

1. MODES DE REPÉRAGE D'UN POINT

1.1 Coordonnées cartésiennes.

Tout point M de l'espace peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y,z) dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Cela signifie que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$. On note alors $M=(x,y,z)$ ou $M=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, ou encore $M\left|\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right.$.

Si l'on passe de $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ à un autre repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, la matrice de passage P est une matrice orthogonale (i.e., $P^T=P^{-1}$). Le nouveau repère a même orientation que $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ (repère direct) si $\det P = 1$, et l'orientation contraire si $\det P = -1$.

1.2 Coordonnées cylindriques.

Pour $\theta\in\mathbb{R}$, soit $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$, $\vec{v}(\theta) = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$.
Le nouveau repère $(O;\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta),\vec{k})$ est orthonormé direct. La matrice de passage est simple :

$$P = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Définition 1. On appelle système de coordonnées cylindriques de M dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, tout triplet $(r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}(\theta) + z\,\vec{k}. \qquad (1)$$

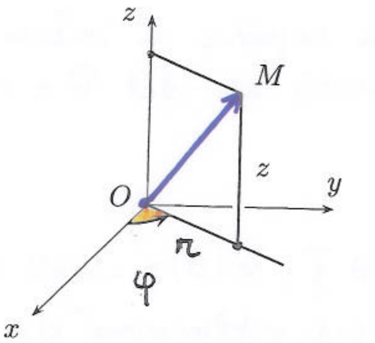
Alors, (r,θ) est un système de coordonnées polaires de la projection orthogonale de M sur le plan (Oxy).

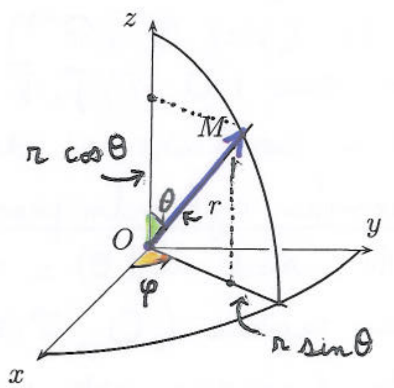
1.3 Coordonnées sphériques.

Définition 2. On appelle système de coordonnées sphériques de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tout triplet $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $r \geqslant 0$ et

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta . \end{cases} \qquad (2)$$

$r\ (\geqslant 0)$ est appelé rayon, φ la longitude, θ la colatitude. Attention, on utilise parfois (en Géophysique, Météo, ...) la latitude $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$ plutôt que la colatitude.
Pour se souvenir de (2), bien voir ce que représentent $r \sin\theta$ et $r\cos\theta$, comment $r\sin\theta$ est ensuite "partagé" en $(r\sin\theta)\cos\varphi$ et $(r\sin\theta)\sin\varphi$ (dans le plan (Oxy)).





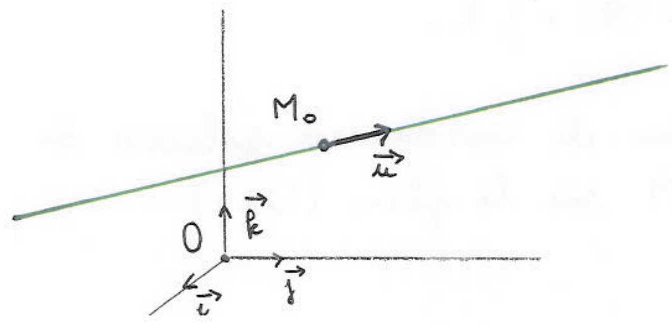
2. DROITES ET PLANS.

2.1. Représentations diverses des droites

- Représentation paramétrique.

La droite passant par le point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et dirigée par le vecteur non nul $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ est paramétrée par :

$$x = x_0 + t\alpha, \quad y = y_0 + t\beta, \quad z = z_0 + t\gamma, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}. \qquad (3)$$



- <u>Equation cartésienne</u>.

Une droite de l'espace admet un système d'équations cartésiennes de la forme :

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \quad \text{avec} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} \text{ de rang 2.} \qquad (4)$$

Cela revient à dire que l'on voit une droite comme intersection de 2 plans non parallèles. On y reviendra plus loin.

Il est utile de représenter (4) sous la forme équivalente suivante :

$$< \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} > = d \text{ et } < \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} > = d'. \qquad (4')$$

La "direction" de la droite décrite en (4) est obtenue comme intersection des "directions" des 2 plans intervenant dans l'équation, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0. \end{cases}$$

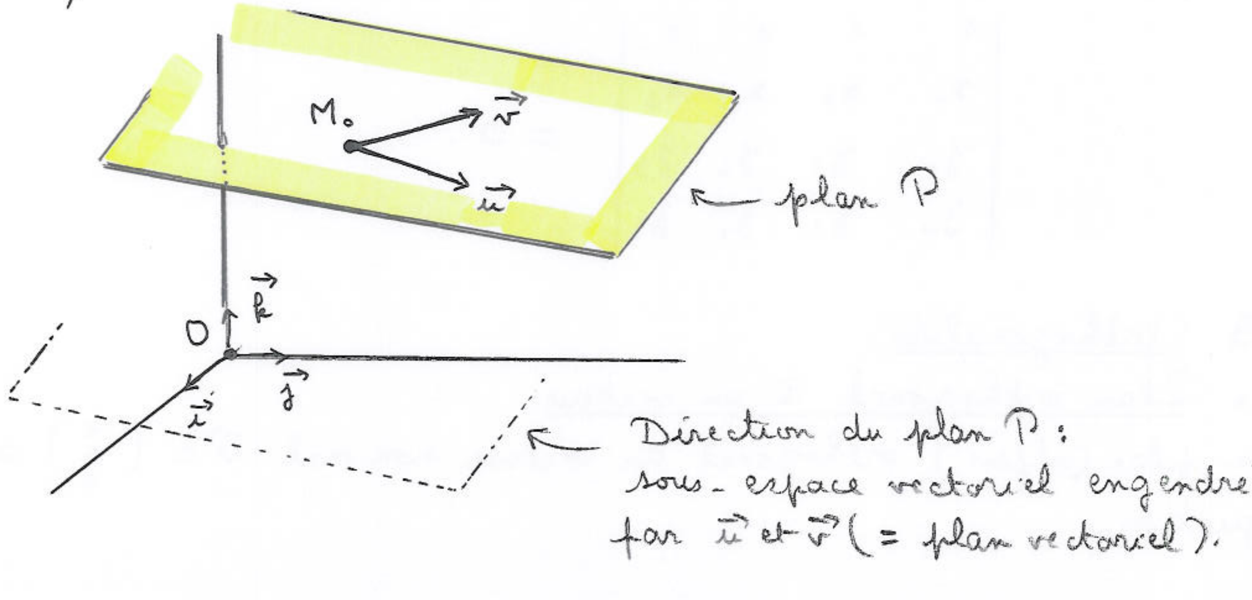
2.2 <u>Représentations diverses des plans.</u>

- <u>Représentation paramétrique.</u>

Le plan passant par le point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et dirigé par les 2 vecteurs linéairement indépendants $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$ est paramétré en :

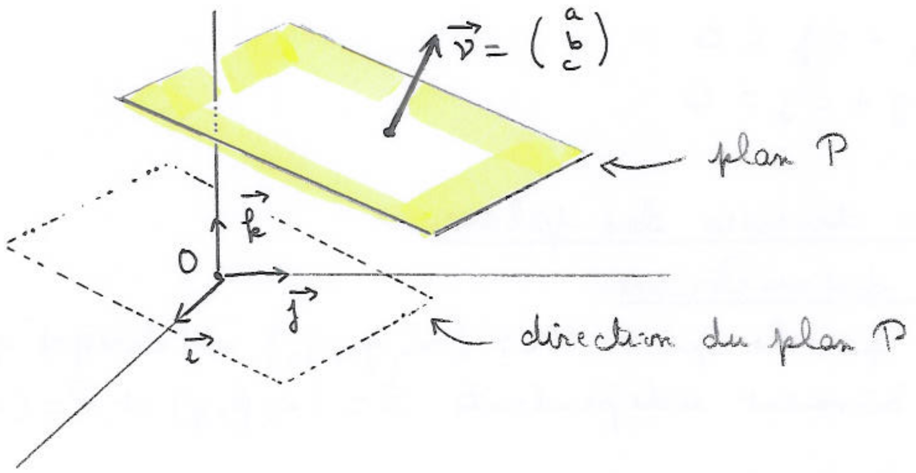
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \text{ soit } \begin{matrix} x = x_0 + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = y_0 + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = z_0 + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{matrix}, \qquad (5)$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.



• Equation cartésienne.

Elle est de la forme
$$ax + by + cz = d \quad \text{avec} \quad (a,b,c) \neq (0,0,0). \qquad (6)$$
Sa "direction" est le plan vectoriel d'équation $ax+by+cz=0$.
Il est bon de voir (6) sous la forme que voici :
$$< \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} > = d, \quad < \overrightarrow{OM}, \vec{v} > = d, \quad \text{où } \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$
Tous les plans parallèles au plan décrit au-dessus ont pour équation
$$< \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} > = \text{quelque chose } (= \text{un réel}) ;$$
ils ont tous la même direction, le plan vectoriel d'équation
$$< \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} > = 0. \qquad (7)$$



Exercice 1 Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les quatre points $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ et $M_3 = (x_3, y_3, z_3)$ soient coplanaires (i.e., soient dans le même plan) est que
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

2.3 Orthogonalité.

• Plan orthogonal à un vecteur.

Un plan (affine) orthogonal au vecteur non nul $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a pour équation

$< \vec{v}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} >$ = quelque chose (= réel), soit

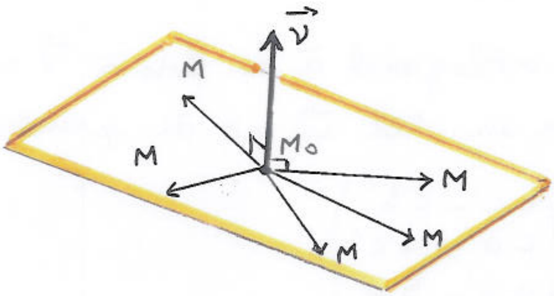
$$ax + by + cz = d. \tag{8}$$

Souvent, une question est posée sous la forme suivante : donner une équation cartésienne du plan passant par $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et orthogonal au vecteur (non nul) $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Réponse claire : le point M appartient au plan en question si, et seulement si, le vecteur $\overrightarrow{M_0M}$ est orthogonal à $\vec{v}$, soit

$$< \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} > = 0,$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \tag{8'}$$

$$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_{= d}.$$



Le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est dit "<u>normal</u>" au plan d'équation (8) ou (8')

• <u>Plans perpendiculaires.</u>

Les plans d'équations

$$ax + by + cz = d \quad \text{et} \quad a'x + b'y + c'z = d'$$

$$\left(< \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} > = d \quad \text{et} < \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} > = d' \right)$$

sont dits <u>perpendiculaires</u> si $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont des <u>vecteurs orthogonaux</u>, c'est-à-dire

$$< \vec{v}, \vec{v}' > = 0, \quad \text{i.e.} \quad aa' + bb' + cc' = 0.$$

<u>Remarque</u> (confusion perpendiculaire – orthogonal ; attention !)

Les directions (= plans vectoriels) de 2 plans perpendiculaires (au sens ci-dessus) ne sont pas des sous-espaces orthogonaux.

- <u>Direction de la droite intersection de 2 plans.</u>

Soit 2 plans d'équations respectives

$$ax + by + cz = d \,, \quad a'x + b'y + c'z = d'.$$

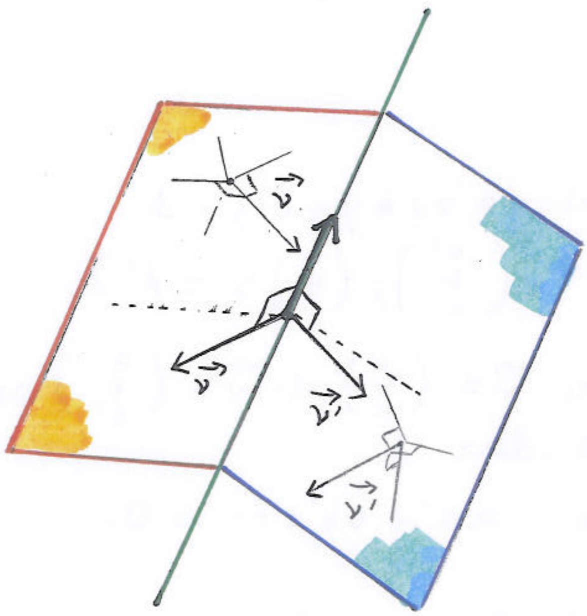
On suppose que ces 2 plans ne sont pas parallèles, ce qui revient à dire que les vecteurs $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires (on est d'accord ?). L'intersection de ces 2 plans est une droite (déjà vu, p. 5). La question posée ici est : <u>comment trouver un vecteur $\vec{u}$ dirigeant cette droite</u> ? Réponse en analysant ce que l'on veut :

- la droite dirigée par $\vec{u}$ se trouve dans le 1er plan, donc $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$;
- la droite dirigée par $\vec{u}$ se trouve dans le 2ème plan, donc $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}'$.

On veut donc que $\vec{u}$ soit orthogonal à la fois à $\vec{v}$ et à $\vec{v}'$; une manière commode d'obtenir un tel $\vec{u}$ est de prendre

$$\vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{v}' = \begin{pmatrix} bc' - cb' \\ ca' - ac' \\ ab' - ba' \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Voir Annexe pour les informations relatives au produit vectoriel $\wedge$.



3. DISTANCES

3.1 Distance d'un point à un plan.

• Plan défini par une équation cartésienne

Le procédé est analogue à celui vu en 2D (Ch. 1, p. 7). Le point $\bar{M} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ projection orthogonale (ou le projeté orthogonal) de M sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $ax + by + cz = d$ est facile à déterminer : la droite passant par M et dirigée par $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ coupe $\mathcal{P}$ en $\bar{M}$. Ainsi $\bar{x} = x + \bar{t}\, a$, $\bar{y} = y + \bar{t}\, b$, $\bar{z} = z + \bar{t}\, c$, où $\bar{t}$ est déterminé par le fait que $\bar{M} \in \mathcal{P}$. En conséquence, $\bar{t} = \dfrac{-ax - by - cz + d}{a^2 + b^2 + c^2}$, d'où

$$d_{\mathcal{P}}(M) = \frac{|ax + by + cz - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad (10)$$

(distance de M à $\mathcal{P}$)

Résultat facile à retenir : mêmes remarques qu'en (Ch. 1, p. 7).

• Plan défini par un point et deux vecteurs

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par le point M_0 et dirigé par les deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On sait que $\overrightarrow{\bar{M}M}$ est dirigé par $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (d'accord ?) et que $\overrightarrow{M_0\bar{M}}$ est orthogonal à $\vec{u} \wedge \vec{v}$; exploitons tout cela :

$$\overrightarrow{\bar{M}M} = \lambda\, \vec{u} \wedge \vec{v}, \text{ de sorte que } \underbrace{\|\overrightarrow{\bar{M}M}\|}_{d_{\mathcal{P}}(M)} = |\lambda| \cdot \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| ;$$

par ailleurs

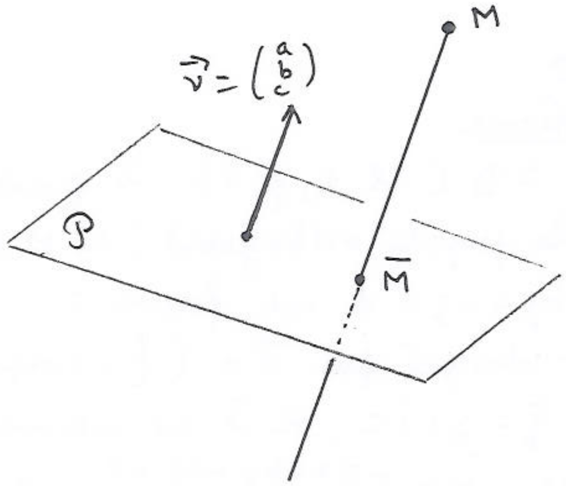
$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{M_0M}, \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle &= \langle \overrightarrow{M_0\bar{M}}, \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle + \langle \overrightarrow{\bar{M}M}, \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle \\ &= \underset{\left(\text{car } \overrightarrow{M_0\bar{M}} \text{ est orthogonal à } \vec{u} \wedge \vec{v}\right)}{0} + \lambda \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2. \end{aligned}$$

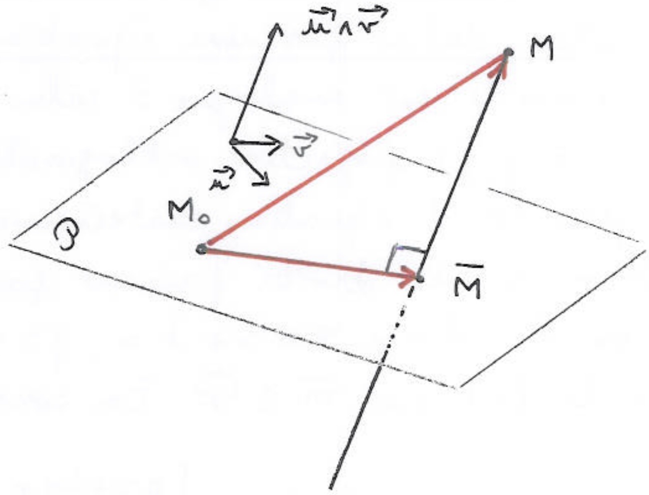
D'où :

$$d_{\mathcal{P}}(M) = \frac{|\langle \overrightarrow{M_0M}, \vec{u} \wedge \vec{v} \rangle|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}. \qquad (11)$$

Le numérateur de $d_{\mathcal{P}}(M)$ dans (11) est un "produit mixte" (voir Annexe) ;

$$\boxed{d_{\mathcal{P}}(M) = \frac{|\text{dét}\,(\overrightarrow{M_0M}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}.} \qquad (11)'$$





3.2 <u>Distance d'un point à une droite.</u>

Soit $\mathcal{D}$ la <u>droite passant par un point M_0 et dirigée par un vecteur non nul $\vec{u}$</u>. On prétend que la distance $d_{\mathcal{D}}(M)$ d'un point M à cette droite $\mathcal{D}$ est

$$\boxed{d_{\mathcal{D}}(M) = \frac{\| \overrightarrow{M_0M} \wedge \vec{u} \|}{\| \vec{u} \|}.} \tag{12}$$

Démontrons cette formule. On a :

$$\overrightarrow{M_0M} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{M_0\overline{M}} \wedge \vec{u} + \overrightarrow{\overline{M}M} \wedge \vec{u} = \vec{0} + \overrightarrow{\overline{M}M} \wedge \vec{u}.$$

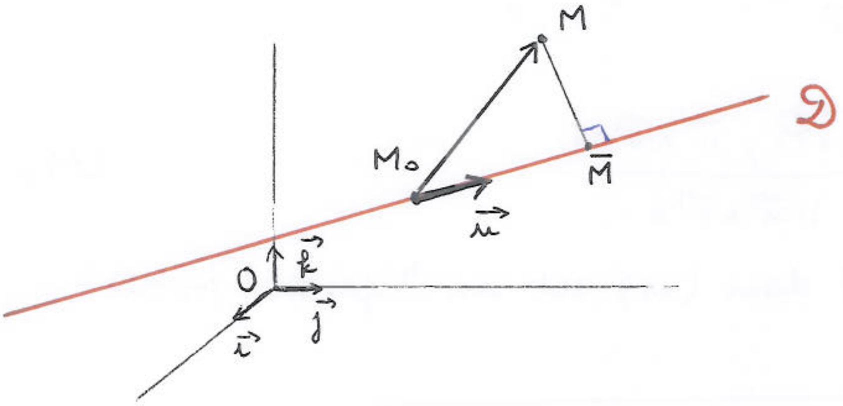
(car $\overrightarrow{M_0\overline{M}}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires)

Comme $\overrightarrow{\overline{M}M}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux, on a

$$\| \overrightarrow{\overline{M}M} \wedge \vec{u} \| = \| \overrightarrow{\overline{M}M} \| . \| \vec{u} \| = d_{\mathcal{D}}(M) . \| \vec{u} \|.$$

D'où

$$d_{\mathcal{D}}(M) = \frac{\| \overrightarrow{\overline{M}M} \wedge \vec{u} \|}{\| \vec{u} \|} = \frac{\| \overrightarrow{M_0M} \wedge \vec{u} \|}{\| \vec{u} \|}.$$



La formule (12) est facile à retenir : on comprend le besoin de normalisation en divisant par $\| \vec{u} \|$; si $\vec{u}$ est unitaire, la distance de M à $\mathcal{D}$ n'est autre que $\| \overrightarrow{M_0M} \wedge \vec{u} \|$.

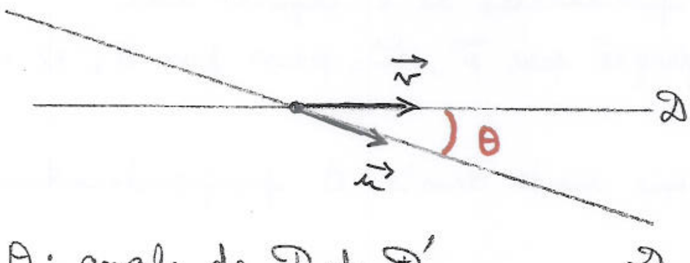
4. ANGLES.

- **Angle de 2 droites**

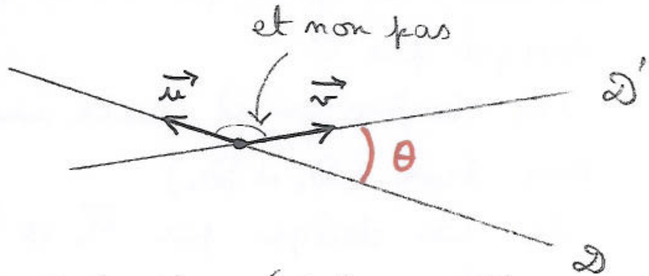
Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont 2 droites dirigées par les vecteurs (non nuls) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ respectivement, on a défini au chap. précédent l'angle θ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (ou "écart angulaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$"); c'est l'unique $\theta \in [0, \pi]$ pour lequel $\cos\theta = \dfrac{<\vec{u}, \vec{v}>}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$. Ici, on s'embarasse moins, et on comprend pourquoi : puisque $\mathcal{D}$ est dirigée aussi bien par $\vec{u}$ que par $-\vec{u}$, on se ramène systématiquement à un angle compris entre 0 et $\pi/2$. D'où, définition : l'angle de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est le réel $\underline{\theta \in [0, \pi/2]}$ défini par

$$\cos\theta = \frac{|<\vec{u}, \vec{v}>|}{\|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|}. \tag{13}$$

C'est l'angle de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (rappelé au-dessus) si $<\vec{u}, \vec{v}> \geq 0$, et "$\pi$ moins cet angle" si $<\vec{u}, \vec{v}> \leq 0$. Voir figure ci-dessous.



θ : angle de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.



Exercice 2. Montrer que l'angle de 2 droites (tel que défini au-dessus) est aussi déterminé de la manière suivante :

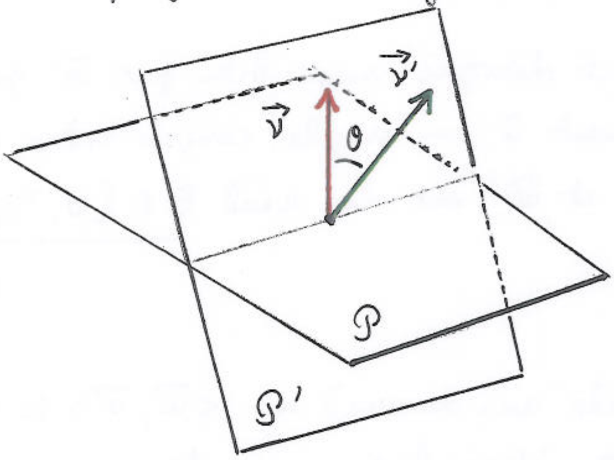
$$\theta \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } \sin\theta = \frac{|\vec{u} \wedge \vec{v}|}{\|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|}. \tag{13'}$$

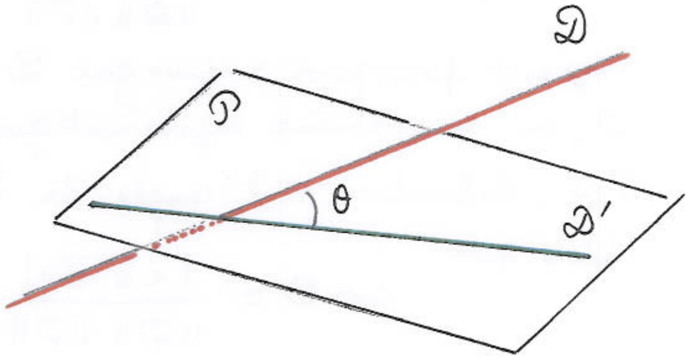
- **Angle de 2 plans.**

Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont 2 plans de vecteurs normaux $\vec{\nu}$ et $\vec{\nu}'$, on définit l'angle de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ comme étant l'angle des droites dirigées par $\vec{\nu}$ et $\vec{\nu}'$ (et donc un réel compris entre 0 et $\pi/2$).
Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si, et seulement si, leur angle vaut $\pi/2$.

• Angle d'une droite et d'un plan

Soit une droite $\mathcal{D}$ et un plan $\mathcal{P}$.
Si $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à $\mathcal{P}$, on dira que l'angle de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{P}$ vaut $\pi/2$. Si $\mathcal{D}$ n'est pas perpendiculaire à $\mathcal{D}$, on définit l'angle de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{P}$ comme celui de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, où $\mathcal{D}'$ est la (droite) projection orthogonale de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{P}$.





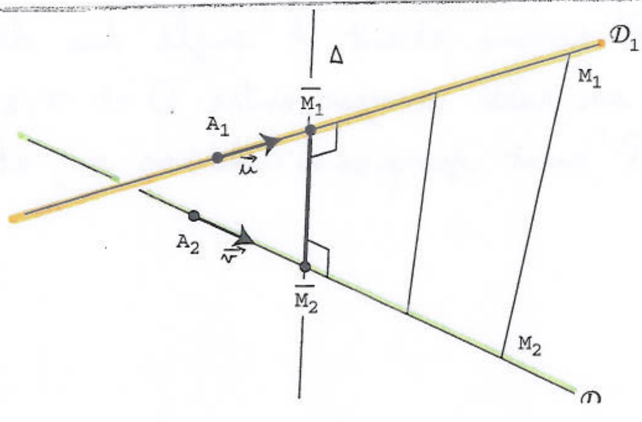
Exercice 3. Distance entre deux droites.

Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites non parallèles de l'espace. Par exemple, $\mathcal{D}_1$ passe par A_1 et est dirigée par $\vec{u}$, $\mathcal{D}_2$ passe par A_2 et est dirigée par $\vec{v}$.

1°) Montrer qu'il existe une et une seule droite Δ perpendiculaire aux deux ($\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$).

2°) On désigne par $\overline{M}_1$ et $\overline{M}_2$ les intersections de Δ avec $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$; montrer que pour tout M_1 de $\mathcal{D}_1$ et M_2 de $\mathcal{D}_2$, on a l'inégalité
$$\overline{M}_1\overline{M}_2 \leq M_1 M_2,$$
et que l'égalité n'a lieu que pour $M_1 = \overline{M}_1$ et $M_2 = \overline{M}_2$. La distance $\overline{M}_1\overline{M}_2$ s'appelle alors la distance de $\mathcal{D}_1$ à $\mathcal{D}_2$, elle est notée $d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2)$.

3°) Montrer que
$$\boxed{d(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2) = \frac{|\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}.} \qquad (14)$$



5. SPHÈRES, CYLINDRES, CÔNES : premiers cas simples.

5.1 Sphères.

On appelle sphère de centre Ω et de rayon $R>0$ l'ensemble des points M de l'espace tel que $\|\overrightarrow{\Omega M}\| = R$.

- Equation cartésienne dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Si $\Omega = (a,b,c)$ est le centre et R le rayon,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, \tag{15}$$

soit encore

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0,$$

où $d := a^2 + b^2 + c^2 - R^2$.

- Représentation paramétrique.

Le paramétrage de la sphère de centre O et de rayon R est très simple ... en coordonnées sphériques (ouaouh !) :

$$\begin{aligned} x &= R \sin\theta \cos\varphi \\ y &= R \sin\theta \sin\varphi \quad , \quad \varphi \in]-\pi, \pi[, \ \theta \in [0,\pi] \\ z &= R \cos\theta . \end{aligned} \tag{16}$$

5.2 Cylindres

L'exemple le plus simple de cylindre est celui (vertical) de base le cercle de centre O et de rayon R (>0) : c'est l'ensemble des points de l'espace dont la distance à l'axe Oz vaut R.

- Equation cartésienne

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{17}$$

(et donc z arbitraire)

- Représentation paramétrique.

En utilisant les coordonnées cylindriques (of course ...), rien de plus simple :

$$r = R \tag{18}$$

(et donc θ et z arbitraires).

5.3 Cônes.

On présente l'exemple le plus simple, celui d'un cône de sommet O et "s'appuyant" sur les ellipses d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ situées dans les plans d'équation $z = 1$ ou $z = -1$.

- Equation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2, \qquad (19)$$

soit :

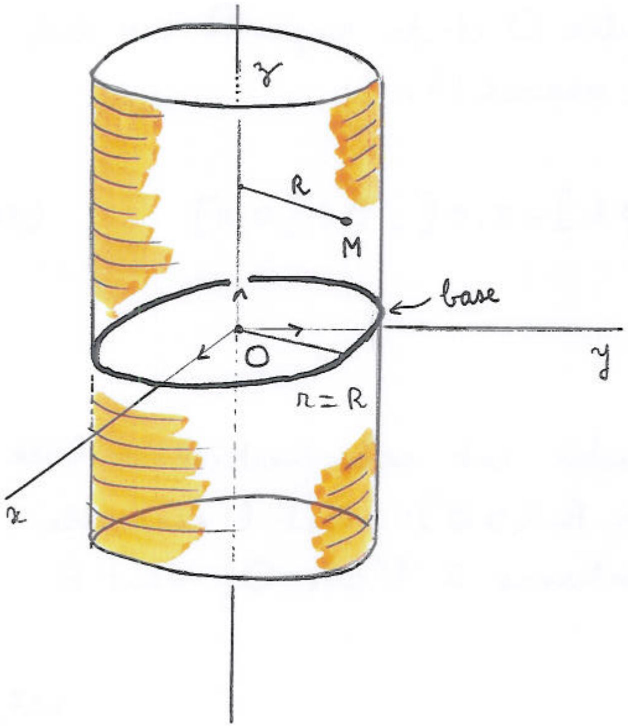
$$z = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \quad \text{(partie dans le demi-espace des } z \geq 0\text{)}$$

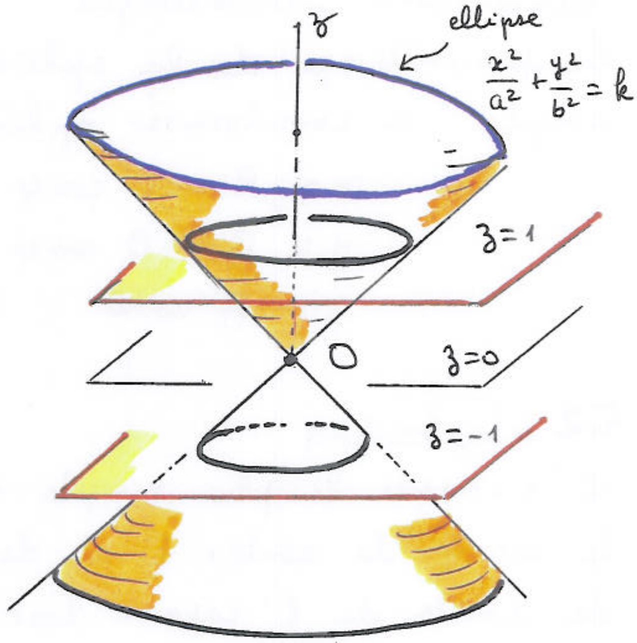
ou bien

$$z = -\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \quad \text{(partie dans le demi-espace des } z \leq 0\text{)}.$$

- Représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = a\,u\cos v \\ y = b\,u\sin v \\ z = u \end{cases}, \quad u \in \mathbb{R}, \; v \in [0, 2\pi[. \qquad (20)$$





ANNEXE : PRODUITS VECTORIELS, MIXTES.

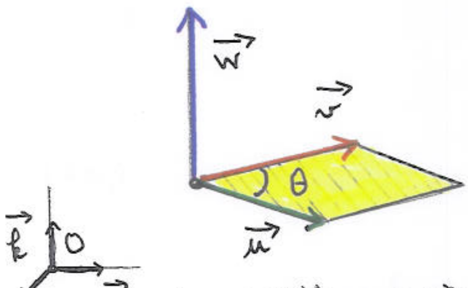
A. PRODUITS VECTORIELS.

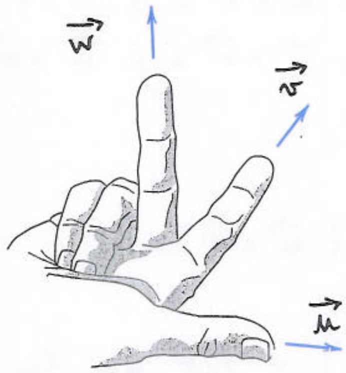
- Définition. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont 2 vecteurs de l'espace (toujours euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct), le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}$ défini de manière unique de la façon suivante :
  - $\vec{w} = \vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;
  - sinon,

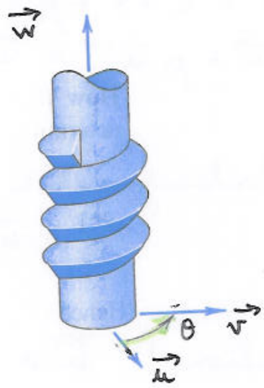
  i) $\vec{w}$ est orthogonal au plan défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$;

  ii) $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\| \sin\theta$, où θ est l'angle des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (donc $\sin\theta \geqslant 0$ toujours !)

  iii) la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe, c'est-à-dire si on place le pouce de la main droite dans le sens de $\vec{u}$ et l'index dans le sens de $\vec{v}$, alors $\vec{w}$ est dans le même sens que le majeur.







Aire de ////// $= \|\vec{w}\|$

$\vec{w}$ est noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (ou $\vec{u} \times \vec{v}$ dans la littérature étrangère).
Comme l'indique son nom, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un <u>vecteur</u>.

- Expression des coordonnées cartésiennes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Si $\vec{u} = x\,\vec{e_1} + y\,\vec{e_2} + z\,\vec{e_3}$ et $\vec{v} = x'\vec{e_1} + y'\vec{e_2} + z'\vec{e_3}$, où $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ est une base orthonormée directe de l'espace (par exemple $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de départ), on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\,\vec{e_1} + (zx' - xz')\,\vec{e_2} + (xy' - yx')\,\vec{e_3}$$

$$(yz' - zy')\,\vec{e_1} - (xz' - zx')\,\vec{e_2} + (xy' - yx')\,\vec{e_3} \qquad (a1)$$

Composantes de $\vec{u} \wedge \vec{v}$:

$$yz' - zy'$$
$$zx' - xz' = -(xz' - zx') \longleftarrow \text{attention à cette } 2^{\text{ème}} \text{ composante}$$
$$xy' - yx'$$

Un moyen mnémotechnique pour retenir (a1) :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}, \qquad (a2)$$

c'est-à-dire :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{e_1} \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} - \vec{e_2} \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} + \vec{e_3} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix},$$

développement du déterminant (a2) suivant la 1ère ligne. Ceci est purement <u>symbolique</u> puisqu'on a mélangé des vecteurs et des scalaires dans la matrice (3,3) apparaissant dans (a2).

- <u>Propriétés du produit vectoriel.</u>

i) Bilinéarité :

$$\vec{u} \wedge (\lambda \vec{v} + \mu \vec{v}') = \lambda\, \vec{u} \wedge \vec{v} + \mu\, \vec{u} \wedge \vec{v}' \qquad (\lambda \text{ et } \mu \text{ réels}) \qquad (a3)$$
$$(\lambda \vec{u} + \mu \vec{u}') \wedge \vec{v} = \lambda\, \vec{u} \wedge \vec{v} + \mu\, \vec{u}' \wedge \vec{v}$$

ii) Antisymétrie :

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v}). \qquad (a4)$$

Attention ! $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ n'est pas la même chose que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$; le produit vectoriel est une opération entre vecteurs qui <u>n'est pas associative</u>.

iii)

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 . \|\vec{v}\|^2 - (\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle)^2. \qquad (a5)$$

$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire du parallélogramme créé à partir des côtés $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (cf. figure de la p. 14, sa valeur croît avec θ allant de 0 à $\pi/2$ (valeur maximale : $\|\vec{u}\| . \|\vec{v}\|$), puis décroît avec θ allant de $\pi/2$ à π (valeur minimale : 0).

Ce qu'exprime (a5) est le "déficit" dans l'inégalité de CAUCHY-BOUNIAKOVSKI-SCHWARZ (voir Ch. 1, p. 17) :

$$(\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle)^2 = \|\vec{u}\|^2 . \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2$$
$$\leq \|\vec{u}\|^2 . \|\vec{v}\|^2 .$$

iv) $$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{w}. \qquad (a6)$$

Attention de ne pas mélanger scalaires et vecteurs !

v) Identité de LAGRANGE (généralisation de (a5)) :

$$\langle \vec{u} \wedge \vec{v}, \vec{w} \wedge \vec{z} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle . \langle \vec{v}, \vec{z} \rangle - \langle \vec{u}, \vec{z} \rangle . \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle. \qquad (a7)$$

B. PRODUITS MIXTES.

On a revu les produits scalaires en Annexe du Ch. 1 et les produits vectoriels ; même s'il s'agit de produits, ce sont des choses radicalement différentes .... c'est comme le fromage pur brebis et le fromage pur vache. Or il y a des fromages dits mixtes, brebis-vache... nous aurons ici aussi un produit mélangeant le produit vectoriel et le produit scalaire, c'est le produit mixte.

- Définition. Le produit mixte des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ est le scalaire défini comme suit :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w} \rangle. \qquad (a8)$$

Attention où l'on met le produit scalaire et le produit vectoriel !
Notation utilisée : $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

- Formulation sous forme d'un déterminant.

A l'aide de (a1) et de l'expression d'un produit scalaire (ch. 1, p. 17), on arrive aisément au fait que

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}, \qquad (a9)$$

où les $x, y, z, \dots, x'', y'', z''$ sont les coordonnées de $\vec{u}, \dots, \vec{w}$ dans une base orthonormée directe de l'espace.

Ainsi, les propriétés d'un produit mixte sont les propriétés du déterminant d'une matrice (3,3). Par exemple,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$$
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}].$$

Exercice. Montrer

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{z}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}]\, \vec{w} - [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\, \vec{z} \qquad (a10)$$

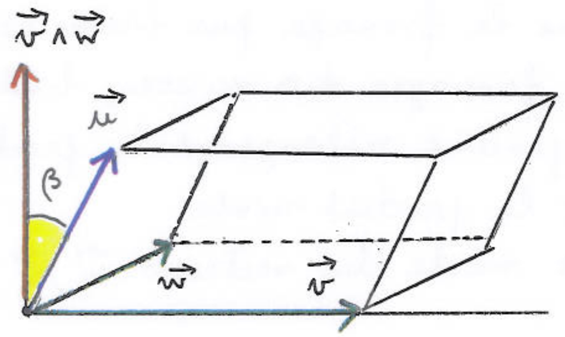
- Interprétation géométrique.

La valeur absolue de $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ (scalaire qui peut être négatif !) est le volume du parallélépipède construit à partir des 3 vecteurs $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$.

En effet, $|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| = |<\vec{u},\vec{v}\wedge\vec{w}>| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\wedge\vec{v}\|\,|\cos\beta|$.

(voir β dans la figure ci-dessous

Or $\|\vec{u}\|.|\cos\beta|$ n'est autre que la hauteur du parallélépipède en question, et $\|\vec{v}\wedge\vec{w}\|$ est l'aire du parallélogramme créé à partir des côtés $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (*). D'où le résultat annoncé.



On comprend alors que $|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|$ est maximal (égal au produit des 3 longueurs $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{w}\|$) lorsque $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux 2 à 2.

De manière générale, on a :

$$|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]| \leq \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|.\|\vec{w}\|, \qquad (a11)$$

inégalité dite de J. HADAMARD.

(*) Rappelons qu'ainsi $1/2\,\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|$ est l'aire du triangle formé à partir de trois points A, B et C.