Ch. III FORMES QUADRATIQUES SUR $\mathbb{R}^n$.

1. Introduction.

2. Liens avec le Calcul différentiel.

3. Le théorème de décomposition spectrale

4. Illustrations dans l'étude des courbes du $2^{\underline{nd}}$ degré et des surfaces du $2^{\underline{nd}}$ degré.

1. Introduction

On a vu au chapitre précédent le rôle important joué par les formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$

$$x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \longmapsto q_A(x) = X^T A X, \qquad (1)$$

où $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique. Nous poursuivons dans ce chapitre leur étude et leurs applications.

2. Liens avec le Calcul différentiel.

La fonction q_A des variables (réelles) $x_1,\dots,x_n$ définie en (1) est d'un maniement aisé pour ce qui concerne les calculs de (vecteurs) gradients, matrices hessiennes, etc. Commençons par le cas simple de $n=2$. On a, pour $A=\begin{bmatrix} a & b\\ b & c\end{bmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$q_A : (x,y)\in\mathbb{R}^2 \longmapsto q_A(x,y) = X^T A X = ax^2+2bxy+cy^2. \qquad (2)$$

Il s'ensuit facilement :

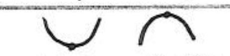
$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,$

$$\vec{\nabla} q_A(x,y) = \begin{pmatrix} 2ax+2by\\ 2bx+2cy\end{pmatrix} = 2AX,$$

$$\nabla^2 q_A(x,y) = \begin{bmatrix} 2a & 2b\\ 2b & 2c\end{bmatrix} = 2A$$

($\nabla^2 q_A(x,y)$ ne dépend pas de (x,y), comme cela était attendu).

Les résultats pour n général ne sont guère plus compliqués. Nous les mettons dans le tableau ci-dessous, en parallèle avec le cas familier où $n=1$ (fonctions d'une seule variable réelle).

	donnée	f. quadrat.	diff. du 1er ordre	diff. du 2^{e} ordre	formes géom.
$n=1$	$a\neq 0$	ax^2	$2ax$	$2a$	 $a>0$ $a<0$
$n\geq 2$	A matrice symétrique $\neq 0$	X^TAX	$2AX$	$2A$	 $A\succ 0$ $A\prec 0$ A autre

Les fonctions suivantes sont d'un usage courant dans les sciences de l'ingénieur

$$f : x=(x_1,\dots,x_n)\longmapsto f(x) := \tfrac{1}{2}X^TAX + b^TX + c, \qquad (3)$$

où $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, $b\in\mathbb{R}^n$ et $c\in\mathbb{R}$. Il y a trois parties dans l'expression de $f(x)$:

— une partie purement quadratique : $\frac{1}{2}X^TAX$, où le coefficient $\frac{1}{2}$ est là simplement pour éviter de traîner un facteur 2 dans les expressions de

gradients ou de matrices hessiennes de f en x (en fonction de la matrice A) ;
- une partie linéaire $b^T X$;
- un terme constant c.

Par suite, les points critiques (ou stationnaires) de f sont les $x=(x_1, \dots, x_n)$ solutions du système linéaire

$$AX + b = 0, \text{ soit encore } A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{4}$$

La forme géométrique du graphe de f (ou l'allure de sa représentation graphique) dépend de A (de son spectre, en fait). Ainsi :

- Si A est définie positive, le système (4) a une et une seule solution $\bar{X} = -A^{-1}b$, et le point correspondant $\bar{x}$ de $\mathbb{R}^n$ est un minimiseur de f sur $\mathbb{R}^n$.
- Si A est définie négative, le système (4) a une et une seule solution $\bar{X} = -A^{-1}b$, et le point correspondant $\bar{x}$ de $\mathbb{R}^n$ est un maximiseur de f sur $\mathbb{R}^n$.

3. Le théorème de décomposition spectrale

On a vu au chapitre précédent que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, il existe P orthogonale telle que $P^{-1}AP \; (= P^T A P) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, où les λ_i sont les valeurs propres de A précisément. Ce résultat, dit de décomposition spectrale de A, est un des points culminants de ce Cours ; il a un double rôle :

- Il permet la diagonalisation de A puisque

$$P^{-1} A P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: D \tag{5}$$

- Il réduit la forme quadratique $X^T A X$ puisque

$$\begin{aligned} X^T A X &= \underbrace{X^T P}\, D\, \underbrace{P^T X} \\ &= Y^T D Y \quad \text{si } Y := P^T X = P^{-1} X. \end{aligned} \tag{6}$$

Ainsi, la forme quadratique en question, exprimée en fonction des nouvelles variables $y_1, y_2, \dots, y_n$ $\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right)$, devient

$$Y^T D Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2, \tag{7}$$

plus facile à gérer que le $X^T A X$ initial. On y voit notamment le rôle essentiel joué par les $\lambda_i > 0$, les $\lambda_i < 0$ et les λ_i nuls.

4. Illustrations dans l'étude des courbes du 2^{nd} degré et des surfaces du 2^{nd} degré.

4.1. Les courbes du 2^{nd} degré sont les courbes du plan dont l'équation cartésienne a la forme générale suivante :

$$A x^2 + 2 B xy + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0. \tag{8}$$

Comment sont-elles faites ? L'important dans cette affaire est de "réduire" les termes quadratiques ($A x^2 + 2 B xy + C y^2$), de manière à faire apparaître, après changement de variables, des équations plus lisibles (de coniques par exemple).
Nous illustrons la méthodologie sur un exemple.
Soit Γ la courbe du plan d'équation cartésienne

$$6 x^2 + 4 xy + 9 y^2 - 1 = 0. \tag{9}$$

Qu'es aquò ? Difficile à deviner en l'état... Nous allons donc "réduire" la partie quadratique $6x^2 + 4xy + 9y^2$ de l'équation. On a :

$$6 x^2 + 4 xy + 9 y^2 = X^T A X, \quad \text{où } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ et } A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 10$ et $\lambda_2 = 5$; $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à λ_1, et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ_2. La matrice $P := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ est une matrice orthogonale telle que

$$P^{-1} A P = P^T A P = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Avec le changement de variables $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, l'équation (9) est transformée en

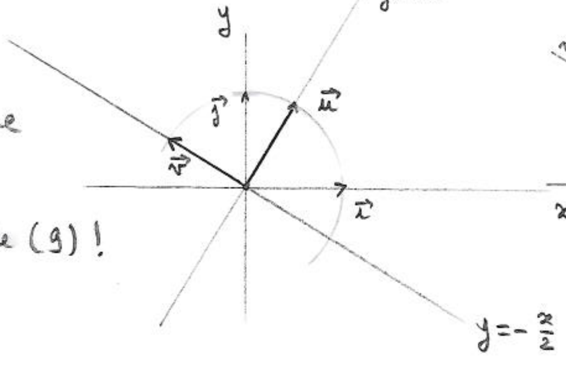
$$10 u^2 + 5 v^2 = 1,$$

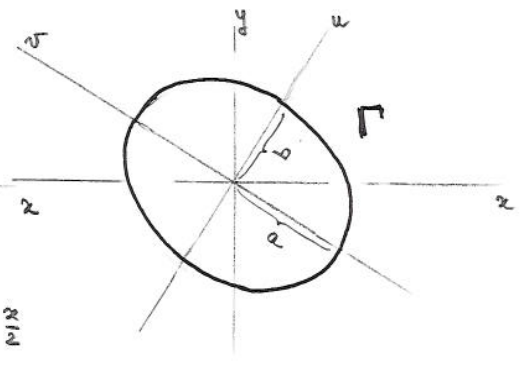
ou encore

$$\frac{u^2}{(1/\sqrt{10})^2} + \frac{v^2}{(1/\sqrt{5})^2} = 1.$$

Ceci permet de reconnaître l'équation d'une ellipse de demi-axes $b = \frac{1}{\sqrt{10}} \simeq 0{,}31$ et $a = \frac{1}{\sqrt{5}} \simeq 0{,}44$.

Voici Γ... avouez que ça ne saute pas aux yeux à partir de (9) !





4.2 Les surfaces du 2^{nd} degré sont les surfaces de l'espace (3D) dont l'équation cartésienne a la forme générale suivante :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exy + 2Fyz$$
$$+ 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0. \qquad (10)$$

Ici aussi l'important est de "réduire" les termes quadratiques (ceux de la $1^{ère}$ ligne de (10)), de manière à faire apparaître, après changement de variables, des équations plus interprétables (de surfaces du 2^{nd} degré plus standards).

Illustrons cela sur un exemple. Soit Σ la surface de l'espace $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne

$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 8xy + 4yz - 4xz - 1 = 0 \qquad (11)$$

On a :

$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 8xy + 4yz - 4xz = [x\ y\ z]\begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = X^T A X,$$

avec $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$.

"Réduisons" $X^T A X$ grâce à l'étude spectrale de A. La matrice A a une valeur propre double $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$ et une valeur propre simple $\lambda_3 = 0$;

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont 2 vecteurs propres associés à la valeur propre 9,

$\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 0. Par suite, $\{\vec{u}/3, \vec{v}/3, \vec{w}/3\}$ constitue une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, constituée de vecteurs propres de A. En termes matriciels,

$$P := \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

est une matrice orthogonale telle que $P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Avec le changement de variables $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, l'équation (11) est transformée en

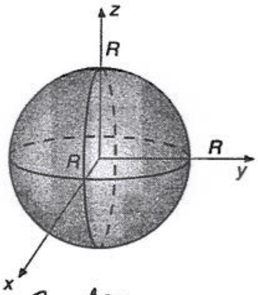
$$9u^2 + 9v^2 = 1,$$

ou encore

$$u^2 + v^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad \text{(il n'y a pas de } w \text{ ici !).}$$

Ceci est l'équation d'une surface cylindrique dont l'axe central est la droite dirigée par $\vec{w}$.

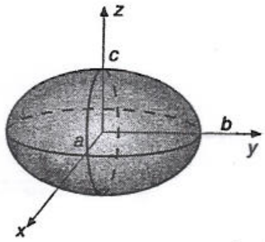
Surfaces du 2nd degré standards.



Sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

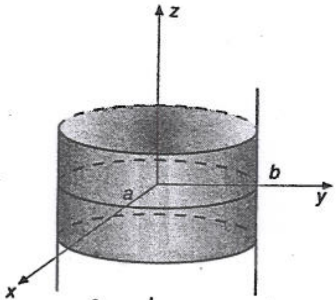
$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$



Ellipsoïde

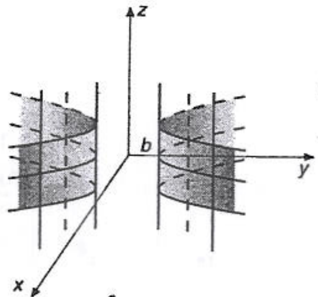
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$V = \frac{4\pi abc}{3}$$



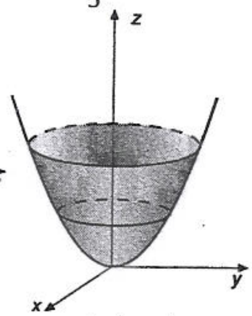
cylindre à base elliptique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



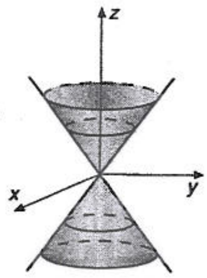
Cylindre à base hyperbolique

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$



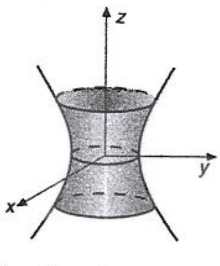
paraboloïde

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



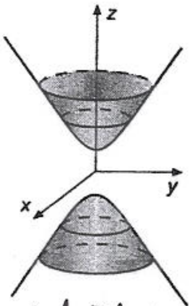
cône

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



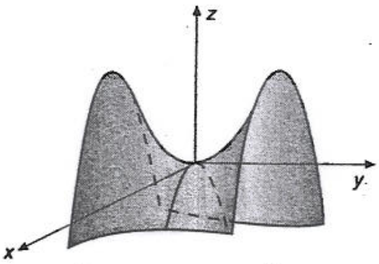
Hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



Paraboloïde hyperbolique

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$