Examen terminal de L2 EEA-MI, Sciences de l'ingénieur
(1ère session de 2010-2011, durée 2 heures).

Avertissement. Les correcteurs seront attentifs à la présentation : on attend de la part de l'étudiant-e une copie *rédigée* et non un amas de contributions disparates ou un simple brouillon.

Les trois exercices proposés sont indépendants ; l'ordre de traitement est indifférent.

Exercice 1. ($\approx$ 7 points)

Les deux questions qui suivent sont *indépendantes*.

1°) On considère dans le plan l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

a) En considérant les cercles de centre O et de rayon 2 et 3 respectivement, donner (en suivant votre bon sens) un encadrement de la longueur de $\mathcal{E}$.

b) A l'aide de la paramétrisation usuelle de $\mathcal{E}$ (qu'il est demandé de rappeler), donner la longueur de $\mathcal{E}$ sous forme d'une intégrale simple $\int_0^{2\pi} ... \, dt$. On présentera une expression aussi simplifiée que possible de cette intégrale, **mais on ne cherchera pas à la calculer.**

2°) On considère dans le plan le cercle Γ d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Soit $P(x,y) = -\frac{y^3}{3}$ et $Q(x,y) = \frac{x^3}{3}$.

a) Exprimer l'intégrale curviligne $I := \oint_{\Gamma+} P\, dx + Q\, dy$ sous forme d'une intégrale simple $\int_0^{2\pi} ... \, dt$. **On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.**

b) Transformer I en une intégrale double à l'aide la formule de Green. Calculer alors cette intégrale double.

Exercice 2. ($\approx$ 7 points)

On considère dans l'espace le solide S délimité par le plan d'équation $z = 0$ et l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$; son bord supérieur est la surface notée Σ. Ainsi

$$\begin{aligned} S &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leqslant 1 \text{ et } z \geqslant 0 \right\}, \\ \Sigma &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 \text{ et } z \geqslant 0 \right\}. \end{aligned}$$

1°) **a)** Esquisser S et Σ.

b) Décrire Σ comme le graphe de la fonction $(x,y) \in D \longmapsto z = f(x,y)$, où le domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ et la fonction f sont à déterminer.

2°) Les deux sous-questions qui suivent sont *indépendantes*.

a) Calculer le volume de S.

Pour ce calcul, on distinguera : l'expression de l'intégrale (à calculer) à laquelle on est conduit ; le calcul effectif de cette intégrale.

b) - Donner l'expression de l'intégrale dont le calcul fournira l'aire de Σ.

- Montrer que l'aire de Σ est majorée par

$$J := \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9}}}\, dxdy.$$

- Calculer J. La majoration de l'aire de Σ qui s'ensuit est-elle logique (= conforme au bon sens) ?

Exercice 3. ($\approx$ 7 points)
Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto q(x, y) := 3x^2 + 2xy + y^2. \tag{1}$$

1°) a) Ecrire $q(x, y)$ sous la forme $X^T AX$, où X est le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ (ou bien la matrice unicolonne $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$), et A une matrice symétrique $(2, 2)$ à déterminer.

b) Exprimer le vecteur gradient $\overrightarrow{\nabla q}(x, y)$ ainsi que la matrice hessienne (ou des dérivées secondes) $\nabla^2 q(x, y)$ en fonction de A et de X.

2°) a) Que signifie " la forme quadratique q (ou bien la matrice A) est définie positive (sur $\mathbb{R}^2$) " ?

b) Montrer que la forme quadratique q de (1) est définie positive.

3°) a) Que peut-on dire, **sans calculs**, des valeurs propres de A ? du caractère diagonalisable ou pas de A ?

On désigne par λ_1 et λ_2 , avec $\lambda_1 < \lambda_2$, les valeurs propres de A.

b) Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP = \text{diag } (\lambda_1, \lambda_2)$. *Recommandation* : On donnera P de la forme $\begin{bmatrix} * & * \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

c) Modifier P de manière à obtenir une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1}AQ = \text{diag } (\lambda_1, \lambda_2)$.

d) *(Hors barème).* On opère le changement de variables $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Donner, **sans calculs**, la forme quadratique q en fonction des nouvelles variables u et v.