Examen terminal

Durée 2H. Epreuve sans document ni calculatrice. Les réponses doivent être justifiées. La rédaction doit être soignée et concise.

Exercice 1. On considère la matrice réelle $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Peut-on dire sans calcul si la matrice A est diagonalisable? Calculer $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Calculer le polynôme caractéristique de A, puis les valeurs propres de A.
3. Pour chaque espace propre, déterminer une équation cartésienne, une équation paramétrique, la dimension, puis une base orthonormée. Calculer l'angle entre espaces propres.
4. Diagonaliser A en base orthonormée (on précisera une matrice diagonale D, une matrice de passage P, son inverse et la relation entre A, D et P).
5. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x, y, z) = e^{x+y+z} - e^x - e^y - e^z.$$
   (a) Calculer le gradient et la Hessienne de f en un point (x, y, z) quelconque.
   (b) Vérifier que $(0, 0, 0)$ est un point critique de f. Déterminer sa nature (minimum local strict, maximum local strict, point selle ou autre).
   (c) Montrer que $(0, 0, 0)$ est l'unique point critique de f.
   (d) Donner un développement limité à l'ordre 2 de f au point $(\ln(2), 0, 0)$.

Exercice 2. Soit $D = \{(u, v) \in [0, 1]^2;\ u^2 + v^2 \leq 1\}$ et Σ la surface paramétrée par l'application $\overrightarrow{\sigma}$ définie par
$$(u, v) \in D \mapsto \overrightarrow{\sigma}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 - u^2 - v^2 \end{pmatrix}.$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble D.
2. Calculer $\dfrac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial u}(u, v) \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial v}(u, v)$ pour $(u, v) \in D$ quelconque.
3. Calculer l'aire de Σ (on pourra passer aux coordonnées polaires).
4. On considère le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^3$ par $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -yz \\ xz \\ x \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer le flux de $\overrightarrow{F}$ au travers de Σ.
   (b) Calculer la divergence et le rotationnel de $\overrightarrow{F}$. Ce champ dérive-t-il d'un potentiel?
   (c) Calculer la circulation de $\overrightarrow{F}$ le long de la courbe paramétrée définie pour $t \in [0, 1]$ par $\overrightarrow{\gamma}(t) := \overrightarrow{\sigma}(t, 0)$.
5. Donner l'équation du plan tangent à Σ au point de paramètre (u, v).
6. Représenter approximativement la surface Σ ainsi que les axes de coordonnées.