Examen partiel

Durée 2H. Epreuve sans document ni calculatrice. Les réponses doivent être justifiées.

Question de cours.

1. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$. Enoncez la définition précise de la propriété "q est définie positive". Proposez un exemple de forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^3$.

2. Soit L une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Expliquez en détail comment se construit la matrice associée à L dans une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

Exercice 1. Dans l'espace affine Euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère les quatre points A, B, C, D dont les coordonnées sont, dans l'ordre, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ et $(1, 1, 1)$. On s'intéresse au tétraèdre $ABCD$, que l'on peut voir comme la pyramide de base le triangle ABC et de sommet D.

1. Calculer les longueurs AB, BC, CA.

2. Montrer que $AB = AD$. On admettra sans le vérifier que $AD = BD = CD$, on dira que le tétraèdre $ABCD$ est régulier.

3. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire l'aire du triangle ABC.

4. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par les points A, B et C.

5. Calculer la distance de D à $\mathcal{P}$.

6. Calculer le volume de $ABCD$, en utilisant que le volume d'une pyramide est égal à un tiers du produit de sa hauteur par l'aire de sa base.

7. Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne de la droite (AB).

8. Soit G le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Calculer le cosinus de l'angle entre $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$.

9. Calculer le cosinus de l'angle entre le plan $\mathcal{P}$ et le plan $\mathcal{P}'$ passant par A, B et D.

Exercice 2. On étudie la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de M et déterminer ses racines réelles et complexes.

2. La matrice M est-elle diagonalisable en tant que matrice réelle? en tant que matrice complexe? Pourquoi?

3. On considère maintenant M comme une matrice à coefficients complexes. Diagonaliser M (on donnera explicitement une matrice diagonale D et une matrice de passage P ainsi que leur relation avec M. Le calcul de P^{-1} n'est pas demandé ici).

4. Calculer $(1 + i)^4$. Indication (sans obligation) : on pourra utiliser module et argument.

5. Utiliser les questions précédentes pour calculer M^{13}. Donner un résultat simplifié.