UPS – L2 SPI-EEA – Mathématiques I

Corrigé du partiel de novembre 2015

Barème sur 25 (la note est tronquée à 20 si elle dépasse cette valeur).

Questions de cours (3 points : 1,5 + 1,5)

1. Une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^3$ est dite définie positive si pour tout triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ différent de $(0, 0, 0)$, $q(x, y, z) > 0$ (1 pt).
   L'exemple le plus simple est $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (0,5 pt).

2. Les trois colonnes de la matrice de L dans une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ sont (dans le même ordre) les coordonnées dans $\mathcal{B}$ des trois vecteurs $L(\overrightarrow{e_1})$, $L(\overrightarrow{e_2})$ et $L(\overrightarrow{e_3})$. Par exemple si $L(\overrightarrow{e_1}) = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}$, la première colonne a pour composantes a, b et c.

Exercice 1. (11 points)

1. **(1,5 points)**
   $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ donc $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$. De même,
   $BC = \sqrt{(0-0)^2 + (0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$ et
   $CA = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$.

2. **(0,5 points)** De même, $AD = \sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} = AB$.

3. **(1,5 points)** $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1 pt).

   Sa norme (l'aire du parallélogramme de côtés $[AB]$ et $[AC]$) vaut $\sqrt{3}$, donc l'aire a du triangle ABC vaut $\sqrt{3}/2$ (0,5 pt).

4. **(1,5 points)** Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $x + y + z - 1 = 0$. En effet, il est normal à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc il a une équation de la forme $x + y + z = d$, et l'on trouve $d = 1$ en écrivant que les coordonnées de A (ou B, ou C) vérifient cette équation.

5. **(1 point)** $d(D, \mathcal{P}) = \frac{|1+1+1-1|}{\|(1,1,1)\|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

6. **(1 point)** $\text{vol}(ABCD) = \frac{ah}{3}$ avec $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (question 3) et $h = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (question 5) donc $\text{vol}(ABCD) = 1/3$.

7. **(2 points : 1 + 1)** La droite (AB), passant par le point $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, a pour équation paramétrique: $\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= 1 - t \\ y &= t \\ z &= 0 \end{cases}$ donc pour

équation cartésienne (en éliminant t) $\begin{cases} x &= 1-y \\ z &= 0. \end{cases}$

8. **(1 point)** α (angle non orienté de vecteurs) $\in [0, \pi]$.
   $\cos\alpha = \frac{\langle \overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB} \rangle}{GA\ GB}$ (sans valeur absolue) $= \frac{\langle (1/2,-1/2,-1/2),(-1/2,1/2,-1/2) \rangle}{\sqrt{3/4}\ \sqrt{3/4}} = \frac{-1/4}{3/4} = \frac{-1}{3}$.
9. **(1 point)** β (angle non orienté de droites – les normales aux deux plans) $\in [0, \pi/2]$.
   La normale à $\mathcal{P}$ est dirigée par $\overrightarrow{n} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (question 3) et (de même) celle à $\mathcal{P}'$ est dirigée par $\overrightarrow{n'} := \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc

$$\cos\beta = \frac{|\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n'} \rangle|}{\|\overrightarrow{n}\|\ \|\overrightarrow{n'}\|} = \frac{|1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times (-1)|}{\sqrt{3}\ \sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 2. (11 points)

1. **(2 points : 1 + 1)** $P_M(\lambda) = (3-\lambda)(-1-\lambda) - (-5)1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ a pour racines complexes $1 + \mathrm{i}$ et $1 - \mathrm{i}$, dont aucune n'est réelle.
2. **(2 points : 1 + 1)** M n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ puisque ses valeurs propres ne sont même pas toutes réelles (en fait, aucune n'est réelle). Elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ puisque ses deux valeurs propres complexes sont même distinctes (si bien qu'elle a deux droites complexes propres).
3. **(4 points)** La droite propre $E_{1+\mathrm{i}}$ a pour paire d'équations

$$(2-\mathrm{i})x + y = 0 \text{ et } -5x + (-2-\mathrm{i})y = 0,$$

   équivalente à

$$y = (-2+\mathrm{i})x \text{ et } -5x + (-2-\mathrm{i})(-2+\mathrm{i})x = 0$$

   ou encore à

$$y = (-2+\mathrm{i})x \text{ et } 0 = 0,$$

   donc $E_{1+\mathrm{i}} = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -2+\mathrm{i} \end{pmatrix})$. De même (ou par conjugaison) $E_{1-\mathrm{i}} = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -2-\mathrm{i} \end{pmatrix})$ donc $M = PDP^{-1}$ (1 pt) pour (3 pts) :

$$D = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2+\mathrm{i} & -2-\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

4. **(1 point)** $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$ donc $(1+\mathrm{i})^4 = -4$. Par conjugaison on obtient $(1-\mathrm{i})^4 = \overline{-4} = -4$. On en déduit la relation $D^4 = -4I_2$, utile pour la suite.
5. **(2 points)** $M^{12} = PD^{12}P^{-1} = P(-4I_2)^3P^{-1} = -64I_2$.
   Donc $M^{13} = -64M = \begin{pmatrix} -192 & -64 \\ 320 & 64 \end{pmatrix}$