UPS–L2–SPI-EEA–Math 1 5 janvier 2015

Examen terminal

Durée 2H. Epreuve sans document ni calculatrice. Les réponses doivent être justifiées. La rédaction doit être soignée et concise.

Question de cours. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice et soit λ une valeur propre de A. Rappelez la définition de la multiplicité géométrique de λ, ainsi que celle de sa multiplicité algébrique.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Calculer le gradient et la Hessienne de f en un point (x, y) quelconque.
2. Montrer que $(0, 0)$ est un point critique de f. Déterminer sa nature (minimum local, maximum local, point selle ou autre).
3. Montrer que le point $(1, 1)$ est aussi un point critique et déterminer sa nature.
4. Donner un développement limité à l'ordre 2 de f au point $(1, 1)$.
5. Déterminer tous les points critiques de f.

Exercice 2. Soit $\overrightarrow{V}(x, y) = \begin{pmatrix} v_1(x, y) \\ v_2(x, y) \end{pmatrix}$ le champ de vecteurs défini pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$v_1(x, y) = 2xy + e^y \quad \text{et} \quad v_2(x, y) = x^2 + xe^y + 1.$$

1. Calculer les dérivés partielles $\dfrac{\partial v_1}{\partial x}, \dfrac{\partial v_1}{\partial y}, \dfrac{\partial v_2}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial v_2}{\partial y}$.
2. En utilisant les calculs de la question précédente, montrer que $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel.
3. Déterminer les potentiels $\varphi(x, y)$ dont $\overrightarrow{V}$ dérive.
4. Calculer la circulation de $\overrightarrow{V}$ le long de la courbe $\overrightarrow{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ définie pour $t \in [0, 1]$.

Exercice 3. Soit $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ u^2 + v^2 \leq 1\}$ et Σ la surface paramétrée par l'application $\overrightarrow{\sigma}$ définie par

$$(u, v) \in D \mapsto \overrightarrow{\sigma}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ v^2 - u^2 \end{pmatrix}.$$

1. Représenter approximativement Σ ainsi que les axes de coordonnées.
2. Calculer $\dfrac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial u}(u, v) \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial v}(u, v)$ pour $(u, v) \in D$ quelconque.
3. Calculer l'aire de Σ (on pourra passer aux coordonnées polaires).
4. On note φ le flux à travers la surface Σ du champ de vecteurs $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que $\varphi = 4 \displaystyle\int_{-1}^{1} u^2 \sqrt{1 - u^2}\, du$.
   (b) Calculer la valeur du flux φ en effectuant le changement de variables $u = \sin(\theta)$.
5. Soit Γ la courbe paramétrée par l'application $\overrightarrow{\gamma}(t) = \overrightarrow{\sigma}\big(\cos(t), \sin(t)\big)$ définie pour $t \in [0, 2\pi]$. Exprimer la longueur de Γ sous la forme d'une intégrale (que l'on ne cherchera pas à calculer jusqu'au bout) et en déduire que Γ est plus longue que le cercle unité.