

Examen de rattrapage

Durée 2H. Epreuve sans document ni calculatrice. Les réponses doivent être justifiées. La rédaction doit être soignée et concise.

Exercice 1. On considère les matrices réelles suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Les matrices A , B et C sont-elles diagonalisables? Justifiez précisément vos réponses. Indication: on ne demande pas de les diagonaliser à ce stade.
2. Diagonaliser la matrice C , en détaillant bien toutes les étapes.
3. Proposez une matrice M telle que $M^3 = C$.
4. Construisez une base orthonormée formée de vecteurs propres pour C .
5. On suppose que \mathbb{R}^3 est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et que A est la matrice dans cette base d'une application linéaire ℓ de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 . Calculez en fonction de \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} , les valeurs de $\ell(\vec{i})$ et de $\ell(2\vec{j} - \vec{k})$.
6. On suppose que C est la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'une forme quadratique Q sur \mathbb{R}^3 . Calculer $Q(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$. Quelle est la nature de Q ?

Exercice 2. On considère la surface Σ donnée par la paramétrisation $\vec{\sigma}$:

$$(s, t) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \mapsto \vec{\sigma}(s, t) = \begin{pmatrix} (2 + \cos(t)) \cdot \cos(s) \\ (2 + \cos(t)) \cdot \sin(s) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

1. Représenter schématiquement Σ (on pourra d'abord tracer la courbe $t \mapsto \vec{\sigma}(0, t)$).
2. (a) Calculer le vecteur $\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial s}(s, t) \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t}(s, t)$. Montrer que sa norme vaut $2 + \cos(t)$.
(b) En déduire l'aire de Σ .
3. (a) Montrer que l'équation du plan tangent à Σ au point de paramètres (s, t) , noté $P_{s,t}$, est: $x \cos(s) \cos(t) + y \sin(s) \cos(t) + z \sin(t) = 1 + 2 \cos(t)$.
(b) Calculer la distance entre l'origine et le plan tangent $P_{s,t}$. Quelle est la valeur maximale prise par cette distance?
4. On considère la fonction \vec{F} de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 définie par $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$. Calculer le flux de \vec{F} à travers Σ . On pourra montrer et utiliser la relation $\int_0^{2\pi} \sin(v)^2 dv = \pi$.