

## Examen partiel

*Durée 2H. Épreuve sans document ni calculatrice. Les réponses doivent être justifiées.*

**Question de cours.** Dans  $\mathbb{R}^2$  muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un point  $M$  a des coordonnées  $(x, y)$ .

1. Soit  $A$  de coordonnées  $(r, s)$ . On note  $(x', y')$  les coordonnées du point  $M$  dans le nouveau repère  $(A; \vec{i}, \vec{j})$ . Exprimer  $(x', y')$  en fonction de  $(x, y)$ .
2. Soient  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$  et  $\vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$  deux vecteurs non colinéaires.
  - (a) Décrire la matrice de passage  $P$  de la base  $(\vec{i}, \vec{j})$  à la base  $(\vec{u}, \vec{v})$ .
  - (b) On note  $(x'', y'')$  les coordonnées de  $M$  dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Énoncer la relation entre les anciennes coordonnées  $(x, y)$  et les nouvelles  $(x'', y'')$ .
  - (c) En déduire l'expression de  $x''$  et de  $y''$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

**Exercice 1.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = xe^{xy}$ . Calculer le gradient de  $f$  en un point  $(x, y)$  quelconque. Montrer que  $f$  n'a pas de point critique.

**Exercice 2.** On étudie la matrice  $M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $M$  et déterminer ses racines réelles et complexes.
2. Déterminer l'espace propre  $E_0$  associé à la valeur propre réelle obtenue (on en donnera une équation cartésienne, une équation paramétrique et on précisera sa nature géométrique).
3. La matrice  $M$  est-elle diagonalisable en tant que matrice réelle? pourquoi?
4. On considère maintenant  $M$  comme une matrice à coefficients complexes. Diagonaliser  $M$  (on donnera explicitement une matrice diagonale  $D$  et une matrice de passage  $P$  ainsi que leur relation avec  $M$ . Le calcul de  $P^{-1}$  n'est pas demandé ici).
5. En utilisant la question précédente, calculer  $M^4$ .

**Exercice 3.** On travaille dans l'espace affine Euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On définit le vecteur  $\vec{w} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ . On considère l'application linéaire  $\vec{F}$  définie, sur l'ensemble des vecteurs, par la formule  $\vec{F}(\vec{u}) = \vec{u} \wedge \vec{w}$ .

1. Exprimer les coordonnées de  $\vec{F}(\vec{u})$  (dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ) en fonction de celles de  $\vec{u}$ , notées  $x, y, z$ . En déduire la matrice de l'application  $\vec{F}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .
2. Soit  $\mathcal{D}$  la droite dirigée par  $\vec{w}$  et passant par l'origine. Calculer le cosinus de son écart angulaire avec l'axe des  $z$ . Déterminer la distance du point  $B$  de coordonnées  $(1, 1, 1)$  à la droite  $\mathcal{D}$ .
3. On définit une application  $q$  par la formule  $q(\vec{u}) = \|\vec{F}(\vec{u})\|^2$ .
  - (a) Calculer  $q(\vec{u})$  en fonction des coordonnées de  $\vec{u}$ , notées  $x, y, z$ .
  - (b) En déduire que  $q$  est une forme quadratique et donner la matrice associée.
  - (c) Quelle est la nature de la forme quadratique  $q$ ?