Examen terminal

Durée 2H. Epreuve sans document ni calculatrice. Les réponses doivent être justifiées. La rédaction doit être soignée et concise.

Question de cours. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Donner le développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de (x_0, y_0), exprimé en fonction des dérivées partielles de f.

Exercice 1. On étudie la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Sans faire de calcul, pouvez-vous dire si A est diagonalisable?
2. Calculer le polynôme caractéristique de A, puis déterminer les valeurs propres de A (on obtiendra deux valeurs propres distinctes).
3. Déterminer les espaces propres associés (on précisera la nature géométrique de chacun de ces espaces et on en donnera une base).
4. Quel est l'angle entre les deux espaces propres?
5. Diagonaliser A (il n'est pas demandé de calculer l'inverse de la matrice de passage).
6. En déduire qu'il existe un nombre α à déterminer, tel que $A^3 = \alpha A$.
7. Donner l'expression de la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée est A (dans la base usuelle). Quelle est la nature de q?

Exercice 2. On considère le cône $\mathcal{C}$ donné par la paramétrisation $\vec{\sigma}$:

$$(u,v) \in [0,1] \times [0,2\pi] \mapsto \vec{\sigma}(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ u \end{pmatrix}.$$

1. Soit Γ la courbe paramétrée par $\vec{\gamma}$ définie pour $t \in [0,1]$ par : $\vec{\gamma}(t) = \vec{\sigma}(t,0)$.
   (a) Que représente la courbe Γ paramétrée par $\vec{\gamma}$?
   (b) Calculer la longueur de Γ.
2. (a) Représenter graphiquement Γ et $\mathcal{C}$, ainsi que les axes de coordonnées.
   (b) Calculer $\dfrac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u,v)$ pour tout $(u,v) \in [0,1] \times [0,2\pi]$.
   (c) En déduire l'aire de $\mathcal{C}$, que l'on notera $a(\mathcal{C})$.
   (d) Calculer la troisième coordonnée du centre de gravité de $\mathcal{C}$, notée $\overline{z} = \frac{1}{a(\mathcal{C})} \iint_{\mathcal{C}} h \, d\sigma$ où $h(x,y,z) = z$.
   (e) Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
3. Soit $\vec{F}$ la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer le flux de $\vec{F}$ à travers $\mathcal{C}$.
   (b) Calculer la divergence et le rotationnel de $\vec{F}$. Cette fonction dérive-t-elle d'un potentiel?