

Examen de rattrapage

Durée 2H. Epreuve sans document ni calculatrice. Les réponses doivent être justifiées. La rédaction doit être soignée et concise.

Exercice 1. Dans l'espace affine Euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A de coordonnées $(1, -1, 0)$ et B de coordonnées $(1, 3, -2)$. Soit \mathcal{P} le plan passant par les points O, A et B .

1. Donner un vecteur \vec{n} normal au plan \mathcal{P} , puis déterminer une équation cartésienne de \mathcal{P} .
2. Calculer la distance du point C de coordonnées $(1, 1, 1)$ au plan \mathcal{P} .
3. On considère un point M de coordonnées (a, b, c) . Donner l'équation paramétrique de la droite \mathcal{D} passant par M et dirigée par \vec{n} .
4. En déduire les coordonnées du point d'intersection de \mathcal{D} et \mathcal{P} , exprimées en fonction des coordonnées (a, b, c) . Ce point est la projection orthogonale de M sur \mathcal{P} .
5. En déduire la matrice, dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, de la projection orthogonale sur \mathcal{P} . Quelle structure particulière a cette matrice?

Exercice 2. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y > 0\}$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = x \ln(x + y).$$

1. Dessiner l'ensemble D .
2. Calculer le gradient de f en un point quelconque $(x, y) \in D$.
3. Montrer que $(0, 1)$ est un point critique pour f , puis montrer que c'est le seul.
4. Calculer la Hessienne de f en un point quelconque.
5. Calculer la Hessienne de f au point critique. Déterminer la nature du point critique.
6. Donner le développement limité d'ordre deux de f au point $(0, 1)$, puis au point $(1, 0)$.

Exercice 3. Soit $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq u \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$ et Σ la surface paramétrée par:

$$(u, v) \in D \mapsto \vec{\sigma}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u) \cos(v) \\ \sin(u) \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}.$$

Notez que Σ est une partie de la sphère unité et que u et v représentent la longitude et la latitude. On considère deux courbes Γ_1 et Γ_2 tracées sur la surface Σ , données par les paramétrisations suivantes:

$$\text{pour tout } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \vec{\gamma}_1(t) = \vec{\sigma}(0, t) \text{ et } \vec{\gamma}_2(t) = \vec{\sigma}(t, t).$$

1. Calculer la longueur de Γ_1 . Montrer que la longueur de Γ_2 vaut $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos(t)^2} dt$. En déduire que Γ_2 est plus longue que Γ_1 .
2. Calculer, pour $(u, v) \in D$, le vecteur $\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial v}(u, v)$. En déduire l'aire de Σ .
3. Faites un schéma représentant Σ, Γ_1 et Γ_2 .