UPS–L2–SPI-EEA–Math 1 8 novembre 2013

Examen partiel

Durée 2H. Epreuve sans document ni calculatrice. Les étapes des calculs doivent être détaillées et toutes les réponses justifiées.

Question de cours. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Donner la définition précise de la propriété "f est différentiable au point (x_0, y_0)".

Exercice 1. On étudie la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Cette matrice a-t-elle une structure particulière?
2. Calculer le polynôme caractéristique de M et déterminer ses racines réelles et complexes.
3. Déterminer l'espace propre associé à la valeur propre réelle obtenue (on donnera une équation cartésienne, une équation paramétrique et on précisera sa nature géométrique).
4. La matrice M est-elle diagonalisable en tant que matrice réelle? en tant que matrice à coefficients complexes? (il n'est pas demandé de diagonaliser M).

Exercice 2. On travaille dans l'espace affine Euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère trois points A, B et C dont les coordonnées sont, dans l'ordre, $(2, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ et $(1, 5, 3)$. On définit le vecteur $\vec{w} := \overrightarrow{AB}$.

1. On considère l'application (linéaire) $\vec{F}$, définie sur l'ensemble des vecteurs, par la formule
$$\vec{F}(\vec{u}) = \vec{w} \wedge \vec{u}.$$
   (a) Exprimer les coordonnées de $\vec{F}(\vec{u})$ (dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$) en fonction de celles de $\vec{u}$, notées x, y, z.
   (b) En déduire la matrice de l'application $\vec{F}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par l'origine et dirigée par $\vec{w}$.
   (a) Déterminer l'écart angulaire entre $\mathcal{D}$ et la droite $(O; \vec{i})$.
   (b) Calculer la distance du point A à la droite $\mathcal{D}$.
3. Calculer l'aire du parallélogramme déterminé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis celle du triangle ABC.
4. Donner l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ contenant les trois points A, B, C (on pourra commencer par déterminer un vecteur normal).
5. Quelle est la distance de O à $\mathcal{P}$?

Exercice 3. On considère la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^2$ par $q(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy$.

1. Donner la matrice A associée à q, dans la base usuelle. Déterminer la nature de q (on pourra utiliser le critère vu en cours pour les matrices carrées de taille 2).
2. Proposer une base orthonormée formée de vecteurs propres pour A.
3. Diagonaliser A dans cette base orthonormée. En utilisant cette approche, calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.
4. Calculer $\frac{\partial q}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial q}{\partial y}(x, y)$. Déterminer les points critiques (ou stationnaires) de q.