Examen terminal

Durée 2h. Documents et calculatrices sont interdits. Les copies doivent être rédigées avec soin. Les correcteurs seront attentifs à la justification des résultats et à la présentation.

Exercice 1. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Justifiez votre réponse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 7 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Indication : On ne demande pas de diagonaliser les matrices. On pourra tirer parti de leur structure particulière.

Exercice 2.

1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer les valeurs propres de M.
   (b) Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres pour M.
   (c) Décrivez la forme quadratique q associée à la matrice symétrique M (en explicitant la valeur de $q(h,k)$ pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$).
   (d) La forme quadratique q est-elle définie positive, semi-définie positive, définie négative, semi-définie négative, ou change-t-elle de signe ?
2. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}^2$ par la formule $f(x,y) = xe^y + ye^x$.
   (a) Calculer le gradient de f, $\overrightarrow{\nabla} f(x,y)$ en (x,y) quelconque.
   (b) Montrer que $(-1,-1)$ est un point critique de f.
   (c) Calculer la Hessienne de f, notée $Hf(x,y)$, en (x,y) quelconque. Calculer le déterminant de $Hf(x,y)$.
   (d) Le point critique $(-1,-1)$ est-il un minumum local strict, un maximum local strict, un point selle ou autre ?
   (e) Donner le développement limité (dit de Taylor) d'ordre 2 de f au point $(-1,-1)$.

Exercice 3. Soit $D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq u \leq v \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ et soit Σ la surface donnée par la paramétrisation :

$$(u,v) \in D \longmapsto \overrightarrow{\sigma}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(u)\cos(v) \\ \sin(u)\cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}.$$

Notez que Σ est une partie de la sphère unité et que u et v représentent la longitude et la latitude. On considère deux courbes Γ_1 et Γ_2 tracées sur la surface Σ, données par les paramétrisations suivantes : pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\overrightarrow{\gamma}_1(t) = \overrightarrow{\sigma}(0,t), \text{ et } \overrightarrow{\gamma}_2(t) = \overrightarrow{\sigma}(t,t).$$

1. Calculer la longueur de Γ_1. Montrer que la longueur de Γ_2 vaut $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos(t)^2}\, dt$. En déduire que Γ_2 est plus longue que Γ_1.
2. Calculer, pour $(u,v) \in D$, le vecteur $\dfrac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial v}(u,v)$. Que représente ce vecteur ?
3. En déduire l'aire de Σ.
4. Faites un schéma représentant Σ, Γ_1 et Γ_2.