

Examen de rattrapage

Durée 2h. Documents et calculatrices sont interdits. Les copies doivent être rédigées avec soin. Les correcteurs seront attentifs à la justification des résultats et à la présentation.

Exercice 1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le spectre de A . Pouvez-vous dire, sans autre calcul, si A est diagonalisable ?
2. Déterminer les espaces propres de A . Pour chacun, on donnera une équation cartésienne, une équation paramétrique et une description géométrique.
3. Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P vérifiant $D = P^{-1}AP$. Calculer P^{-1} .
4. Soit $n \geq 1$ un entier. Utiliser la question précédente pour calculer A^n , en fonction de n seulement.
5. On s'intéresse à trois suites $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ et $(z_n)_{n \geq 0}$ définies par $x_0 = 1$, $y_0 = z_0 = 0$ et la relation de récurrence valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = -4x_n - 6y_n \\ y_{n+1} = 3x_n + 5y_n \\ z_{n+1} = 3x_n + 6y_n + 5z_n \end{cases}$$

(a) On définit le vecteur $V_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. Exprimer V_{n+1} en fonction de A et V_n .

(b) En déduire l'expression de x_n en fonction de n .

Exercice 2. Le but de cet exercice est d'étudier les minima de la fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$.

1. Calculer le gradient de f en tout point (x, y) .
2. Vérifier que $(0, 0)$, $(2, -2)$ et $(-2, 2)$ sont des points critiques de f . Montrer que ce sont les seuls.
3. Calculer la Hessienne de f en tout point (x, y) .
4. Précisez la nature de la Hessienne en chaque point critique. Déterminer les minima locaux de f .
5. En supposant que l'on sache par avance que la fonction f admet un minimum global, montrer que $f(x, y) \geq -32$, pour tout (x, y) .

Exercice 3. Soit la surface Σ de paramétrisation $\vec{\sigma} : [0, 2\pi] \times [0, 5] \mapsto \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\vec{\sigma}(s, t) = \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \\ t \end{pmatrix}, \quad (s, t) \in [0, 2\pi] \times [0, 5].$$

1. Représenter schématiquement la surface Σ .
2. Calculer $\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial s}(s, t) \wedge \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial t}(s, t)$, puis l'aire de Σ .
3. Calculer le flux à travers Σ de la fonction $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, définie par

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix}.$$