UPS–L2–SPI-EEA–Math 1 8 novembre 2012

Examen partiel

Durée 2H. Epreuve sans document ni calculatrice. Les étapes des calculs doivent être détaillées et toutes les réponses justifiées.

Question de cours. (Chaque réponse tient en une ligne)

1. Rappeler la forme de l'équation cartésienne réduite d'une ellipse (on notera a et b les longueurs des demi-axes). En donner aussi une équation paramétrique.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Que peut-on dire en général de ses valeurs propres réelles?

Exercice 1. Dans l'espace affine Euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère les quatre points A, B, C, D dont les coordonnée sont, dans l'ordre, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ et $(1, 1, 1)$. On s'intéresse au tétraèdre $ABCD$, que l'on peut voir comme la pyramide de base le triangle ABC et de sommet D.

1. Calculer les longueurs AB, BC, CA.
2. Montrer que $AB = AD$. On admettra sans le vérifier que $AD = BD = CD$, on dira que le tétraèdre $ABCD$ est régulier.
3. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En déduire l'aire du parallélogramme de côtés $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis l'aire du triangle ABC et la distance de B à la droite (AC).
4. Donner un équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par les points A, B et C.
5. Calculer la distance de D à $\mathcal{P}$.
6. Calculer le volume de $ABCD$, en utilisant que le volume d'une pyramide est égal à un tiers du produit de sa hauteur par l'aire de sa base.
7. Soit M_1 le milieu du segment $[AB]$ et M_2 le milieu du segment $[CD]$. Montrer que la droite (M_1M_2) est une perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD). En déduire, grâce au théorème de Pythagore, la distance entre l'arête $[AB]$ et l'arête $[CD]$.

Exercice 2. Soit a un paramètre réel et soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1- Calculer le polynôme caractéristique de A et montrer que ses valeurs propres sont 1 et 2.

2- Dans cette question, $a = 0$.

- a- Calculer le sous-espace propre E_2 de A.
- b- Calculer le sous-espace propre E_1 de A. Montrer que c'est un plan. On en donnera un vecteur normal. On construira aussi deux vecteurs non colinéaires appartenant à E_1.
- c- Déterminer P inversible et D diagonale telles que $P^{-1}AP = D$. On ne demande pas de calculer P^{-1}.
- d- Calculer l'angle entre E_1 et E_2.

3- Dans cette question, $a = 1$.

- a- Calculer les sous-espaces propres E_1 et E_2 de A.
- b- Justifier que A n'est pas diagonalisable.
- c- Calculer le cosinus de l'angle entre E_1 et E_2.