Examen terminal

Durée 2h. Documents et calculatrices sont interdits. Les copies doivent être rédigées avec soin. Les correcteurs seront attentifs à la justification des résultats et à la présentation.

Exercice 1 (7 points). On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A. Déterminer explicitement une matrice inversible P, son inverse P^{-1} et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.
2. En déduire qu'il existe une matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$. On donnera une expression simplifiée de B.
3. Existe-t-il une matrice C dans $M_2(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = A$? Indication : on pourra considérer les déterminants.
4. Existe-t-il une matrice C dans $M_2(\mathbb{C})$ telle que $C^2 = A$?

Exercice 2 (13 points). On considère la surface Σ donnée par la paramétrisation $\overrightarrow{\sigma}$:

$$(s,t) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi] \longmapsto \overrightarrow{\sigma}(s,t) = \begin{pmatrix} \big(2+\cos(t)\big).\cos(s) \\ \big(2+\cos(t)\big).\sin(s) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

1. (a) Représenter les supports des trois arcs paramétrés suivants :

$$s \in [0,2\pi] \longmapsto \overrightarrow{\sigma}(s,0), \quad s \in [0,2\pi] \longmapsto \overrightarrow{\sigma}(s,\pi), \quad t \in [0,2\pi] \longmapsto \overrightarrow{\sigma}\big(\frac{\pi}{2},t\big).$$

   (b) Représenter schématiquement Σ.

2. (a) Calculer $\dfrac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial s}(s,t) \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial t}(s,t)$.

   (b) Montrer que pour tous s,t dans $[0,2\pi]$, $\left\| \dfrac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial s}(s,t) \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial t}(s,t) \right\| = 2+\cos(t)$.

   (c) En déduire l'aire de Σ.

3. (a) Montrer que l'équation du plan tangent à Σ au point de paramètres (s,t), noté $P_{s,t}$, est : $x\cos(s)\cos(t) + y\sin(s)\cos(t) + z\sin(t) = 1 + 2\cos(t)$.

   (b) Calculer la distance entre l'origine et le plan tangent $P_{s,t}$. Quelle est la valeur maximale prise par cette distance ?

   (c) On suppose ici que $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Calculer l'écart angulaire entre le plan tangent $P_{s,t}$ et l'axe vertical (Oz).

4. On considère la fonction $\overrightarrow{F}$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer le flux de $\overrightarrow{F}$ à travers Σ. On pourra montrer et utiliser la relation $\int_0^{2\pi} \sin(v)^2 dv = \pi$.

   (b) Calculer la divergence de $\overrightarrow{F}$.

   (c) Rappeler et appliquer le théorème de la divergence pour calculer le volume bordé par la surface Σ.