Examen de rattrapage

Durée 2h. Documents et calculatrices sont interdits. Les copies doivent être rédigées avec soin. Les correcteurs seront attentifs à la justification des résultats et à la présentation.

Exercice 1. On considère les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Les matrices A, B et C sont-elles diagonalisables ? Justifiez précisément vos réponses. Indication : on ne demande pas de les diagonaliser à ce stade.
2. Diagonaliser la matrice C.
3. Proposez une matrice M telle que $M^3 = C$.
4. Construisez une base orthonormée formée de vecteurs propres pour C.

Exercice 2. On considère la surface Σ donnée par la paramétrisation $\overrightarrow{\sigma}$:

$$(s,t) \in [0,1] \times [0, 2\pi] \longmapsto \overrightarrow{\sigma}(s,t) = \begin{pmatrix} s\cos(t) \\ s\sin(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

On définit aussi la courbe Γ (tracée sur Σ) paramétrée par l'application $\overrightarrow{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, définie par $\overrightarrow{\gamma}(t) = \sigma(1,t)$.

1. (a) Représenter la courbe Γ.
   (b) Calculer la longueur de Γ.
   (c) Déterminer le barycentre de Γ (on suppose que la densité de masse est uniforme).
2. (a) Représenter schématiquement la surface Σ.
   (b) Calculer $\dfrac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial s}(s,t) \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial t}(s,t)$.
   (c) Calculer l'aire de Σ. Indication : on obtiendra une expression intégrale dans laquelle on pourra effectuer le changement de variables $s = \sinh(u)$.
3. (a) Déterminer l'équation du plan tangent à Σ au point de paramètres (s,t), noté $P_{s,t}$.
   (b) Calculer la distance entre l'origine et le plan $P_{s,t}$.
   (c) Calculer l'écart angulaire entre le plan tangent $P_{s,t}$ et l'axe vertical (Oz).
4. On considère la fonction $\overrightarrow{F}$, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $\overrightarrow{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$.

   Calculer le flux de $\overrightarrow{F}$ à travers Σ.