Examen partiel

Durée 2h. Documents et calculatrices sont interdits. Les copies doivent être rédigées avec soin. Les correcteurs seront attentifs à la justification des résultats et à la présentation.

Exercice 1. (7 points) On travaille dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. On note

$$\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit P_1 le plan (affine) passant par le point de coordonnées $(1, 2, 3)$ et dirigé par $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{u}$. Enfin on note P_2 le plan passant par l'origine et dirigé par $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{u}$.

1. Calculer $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{u}$.
2. Donner une équation paramétrique de P_1.
3. Donner une équation cartésienne de P_1.
4. Quelle est la distance entre l'origine et le plan P_1 ?
5. Déterminer l'aire du parallélogramme dont les côtés sont donnés par $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{u}$.
6. Calculer l'écart angulaire entre les plans P_1 et P_2.

Exercice 2. (8 points) On considère la fonction numérique f définie sur l'ensemble $D :=]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ par la formule

$$f(x, y) = x\left(\left(\ln x\right)^2 + y^2\right),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Calculer le gradient de f, $\overrightarrow{\nabla} f(x, y)$ en $(x, y) \in D$ quelconque.
2. Montrer que f admet deux points critiques (i.e. où son gradient est nul).
3. Calculer la Hessienne de f, $D^2 f(x, y)$ en $(x, y) \in D$ quelconque.
4. Pour quelles valeurs de $a > 0$ la Hessienne $D^2 f(a, 0)$ est-elle définie positive ? Pour quelles valeurs est-elle dégénérée ?
5. Préciser la nature des deux points critiques (minumum local, maximum local, point selle ?)
6. Montrer que pour tout $(x, y) \in D$, $f(x, y) \geq 0$. La fonction f admet-elle un minimum global ?

Exercice 3. (5 points) On travaille dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = -1$, et F le point de coordonnées $(1, 0)$. Déterminer l'équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{P}$ des points qui sont à égale distance de F et de $\mathcal{D}$.
2. Pour $t \in \mathbb{R}$ on définit le point $M(t)$ de coordonnées $(t^2, 2t)$ et on note $\overrightarrow{\gamma}(t) = \overrightarrow{OM(t)}$. Calculer le cosinus de l'angle entre $\overrightarrow{\gamma}'(t)$ et $\overrightarrow{i}$. Donner une expression simplifiée du cosinus de l'angle entre $\overrightarrow{\gamma}'(t)$ et $\overrightarrow{FM(t)}$.
3. Interpréter géométriquement le résultat de la question précédente.