

Examen partiel de mathématiques
L2 EEA-MI (Licence “Sciences de l’ingénieur”)
1ère période de 2010-2011, durée 2 heures.

Avertissement. Les correcteurs seront attentifs à la présentation : on attend de la part de l’étudiant-e une copie *rédigée* et non un amas de contributions disparates ou un simple brouillon.

Aucun document écrit (Cours, TD, livre) n’est autorisé, aucune calculatrice n’est autorisée.

Exercice 1.

Dans l’espace \mathbb{R}^3 muni d’un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan (Π) d’équation cartésienne

$$ax + by + cz = 1,$$

où les constantes réelles a, b, c vérifient : $a > 0, b > 0, c > 0$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On désigne par A le point d’intersection de (Π) avec l’axe des x , B le point d’intersection de (Π) avec l’axe des y , C le point d’intersection de (Π) avec l’axe des z .

- 1°) Quelle est la distance de l’origine O au plan (Π) ?
- 2°) Quel est le volume du tétraèdre $OABC$?
- 3°) Déterminer le point P projeté orthogonal de O sur le plan (Π) .
- 4°) Quelle est l’aire du triangle ABC ? [*Plusieurs méthodes sont possibles*].
- 5°) On suppose désormais que $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
 - a) Que vaut l’écart angulaire entre \vec{AB} et \vec{AC} ? [*Plusieurs méthodes sont possibles*].
 - b) Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 2.

On considère la matrice $(3, 3)$ réelle suivante

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 1°)
 - a) Calculer le polynôme caractéristique P_A de A .
 - b) Montrer que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$.
- 2°)
 - a) Déterminer les deux sous-espaces propres E_1 et E_{-2} associés aux valeurs propres 1 et -2 respectivement.
 - b) Déterminer les dimensions de chacun de ces deux sous-espaces propres.
- 3°)
 - a) Donner une raison selon laquelle A est diagonalisable.
 - b) Proposer une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.