Contrôle continu 1

Durée 2H. Epreuve sans document ni calculatrice. Les réponses doivent être justifiées. La rédaction doit être soignée et concise.

Exercice 1. On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 1$ et la relation de récurrence suivante: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 3}.$$

On admettra qu'elle est bien définie.

1. Calculer les valeurs de u_1 et u_2 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2^n}{2 \cdot 3^n - 2^n}$.

Exercice 2. On considère deux applications f et g , d'ensemble de départ $]0, +\infty[$ et d'ensemble d'arrivée $]0, +\infty[$, définies pour tout $x > 0$ par

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

1. Calculer l'application composée $f \circ g$. En déduire que f n'est pas injective.
2. Etudier le sens de variation de la fonction f et tracer approximativement son graphe.
3. Déterminer les ensembles $f(]0, 1])$ et $f(\frac{1}{2}, 2])$.
4. Soit $y \in]0, +\infty[$ quelconque. Décrire $f^{-1}(\{y\})$. On pourra montrer que la condition $x \in f^{-1}(\{y\})$ se ramène à une équation du second degré en x .
5. Soit $h :]0, 1] \rightarrow [2, +\infty[$ l'application définie par $h(x) = f(x)$ pour $x \in]0, 1]$. Démontrer que h est une bijection et décrire son application réciproque.

Exercice 3. Soit $f : E \rightarrow F$ une application entre ensembles finis. On considère l'énoncé P suivant:

$$(\text{card}(E) < \text{card}(F)) \implies (\exists y \in F, \forall x \in E, y \neq f(x))$$

1. Énoncer la contraposée de P
2. L'énoncé P est-il vrai pour toutes les applications, ou pour certaines? Pourquoi?

Exercice 4. Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

1. Donnez une définition mathématique précise de la propriété " f est injective " (on attend une définition formalisée).
2. Décrivez explicitement toutes les applications injectives de $\{1, 2\}$ à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$, puis toutes les applications surjectives de $\{1, 2\}$ à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$.
3. On suppose que E et F sont finis et on note $m = \text{card}(E)$ et $n = \text{card}(F)$. Combien y a-t-il d'applications de E dans F , combien parmi ces applications sont injectives? Faites l'application numérique pour $m = 4$ et $n = 6$.
4. Soient $A, B \subset E$, montrez par double inclusion que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Quelle relation est toujours vraie entre $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$? Démontrez-la.