UPS–L1–Math 4 30 mars 2016

Correction du contrôle continu 1

Exercice 1. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 1$ et la relation de récurrence suivante: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 3}.$$

1. Calculer les valeurs de u_1 et u_2.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2^n}{2 \cdot 3^n - 2^n}$.

. . . . . .

1. *On utilise la relation de récurrence pour $n = 0$:* $u_1 = \dfrac{2u_0}{u_0 + 3} = \dfrac{2 \cdot 1}{1 + 3} = \dfrac{1}{2}$.

   De même la relation de récurrence pour $n = 1$ donne, $u_2 = \dfrac{2u_1}{u_1 + 3} = \dfrac{2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 3} = \dfrac{1}{\frac{7}{2}} = \dfrac{2}{7}$.

2. *Initialisation: La propriété à démontrer est vérifiée pour $n = 0$, en effet :*

$$\frac{2^0}{2 \cdot 3^0 - 2^0} = \frac{1}{2 \cdot 1 - 1} = 1 = u_0.$$

   Hérédité: Supposons que la propriété soit vérifiée au rang n. On va alors calculer u_{n+1} en utilisant la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 3} = \frac{2\frac{2^n}{2\cdot 3^n - 2^n}}{\frac{2^n}{2\cdot 3^n - 2^n} + 3} = \frac{2 \cdot 2^n}{2^n + 3(2 \cdot 3^n - 2^n)} = \frac{2^{n+1}}{2 \cdot 3^{n+1} - 2 \cdot 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2 \cdot 3^{n+1} - 2^{n+1}},$$

   ce qui est bien la propriété voulue au rang $n + 1$.

   Donc, par le principe de récurrence, la propriété est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. On considère deux applications f et g, d'ensemble de départ $]0, +\infty[$ et d'ensemble d'arrivée $]0, +\infty[$, définies pour tout $x > 0$ par

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x}.$$

1. Calculer l'application composée $f \circ g$. En déduire que f n'est pas injective.
2. Etudier le sens de variation de la fonction f et tracer approximativement son graphe.
3. Déterminer les ensembles $f\big(]0, 1]\big)$ et $f\big(]\frac{1}{2}, 2[\big)$.
4. Soit $y \in]0, +\infty[$ quelconque. Décrire $f^{-1}\big(\{y\}\big)$. On pourra montrer que la condition $x \in f^{-1}\big(\{y\}\big)$ se ramène à une équation du second degré en x.
5. Soit $h :]0, 1] \to [2, +\infty[$ l'application définie par $h(x) = f(x)$ pour $x \in]0, 1]$. Démontrer que h est une bijection et décrire son application réciproque.

. . . . . .

1. *Pour tout* $x \in]0,+\infty[$, *on a* $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{x} + x = f(x)$, *ce qui montre que* $f\circ g = f$ *car* $f\circ g$ *et* f *ont mêmes ensembles de départ et d'arrivée.*

   Pour tout $x_1 \in]0,+\infty[$, *posons* $x_2 = g(x_1) = \frac{1}{x_1}$. *Par le calcul précédent* $f(x_2) = f(x_1)$. *En particulier pour* $x_1 = 2$ *on obtient* $f(2) = f(1/2)$. *Par conséquent* f *n'est pas injective.*

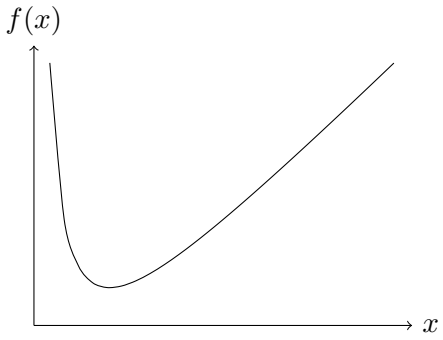
2. *Il est clair que* f *est dérivable sur* $]0,+\infty[$. *On étudie le signe de* $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$:

$$f'(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; 1 \geq \frac{1}{x^2} \;\Leftrightarrow\; x^2 \geq 1 \;\Leftrightarrow\; x \geq 1 \quad \textit{(car } x \textit{ est positif)} .$$

   On calcule également $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *et* $f(1) = 2$ *pour aboutir au tableau de variations suivant :*

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

   On en déduit un graphe approximatif de f :



3. *Au vu des variations de* f *et puisque* $f(1) = 2$, $f(2) = f(1/2) = \frac{5}{2}$, *on "voit" que* $f\big(]0,1]\big) = \{f(x) | x \in]0,1]\} = [2,+\infty[$ *et* $f\big(]\frac{1}{2},2[\big) = \{f(x) | x \in]\frac{1}{2},2[\} = [2,\frac{5}{2}[$.

   Pour justifier précisément la première égalité, on peut invoquer le fait que f *est continue et décroissante sur* $]0,1]$, *avec* $f(1) = 2$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$*:*

   On obtient ainsi que si $x \leq 1$, *alors* $f(x) \geq f(1) = 2$, *ce qui donne que* $f\big(]0,1]\big) \subset [2,+\infty[$. *Pour avoir l'inclusion dans l'autre sens, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires (*f *prend la valeur 2 en* $x = 1$ *et des valeurs aussi grandes que l'on veut lorsque* x *tend vers 0, comme* f *est continue toute valeur entre 2 et* $+\infty$ *est aussi dans l'image de* $]0,1]$*).*

   On peut montrer de manière similaire que $f\big(]\frac{1}{2},2[\big) = [2,\frac{5}{2}[$ *en utilisant la continuité, la décroissance de* f *sur* $]\frac{1}{2},1]$ *et sa croissance sur* $[1,2[$.

4. *Par définition* $f^{-1}\big(\{y\}\big) = \big\{x \in]0,+\infty[,\ f(x) = y\big\}$. *Pour tout* $x \in]1,+\infty[$ *on a*

$$f(x) = y \;\Leftrightarrow\; x + \frac{1}{x} = y \;\Leftrightarrow\; x^2 - yx + 1 = 0.$$

   Le discriminant de cette équation du second degré (en x*) vaut* $\Delta = y^2 - 4$.

- *Pour $y < 2$, $\Delta < 0$ et l'équation n'a pas de solution et $f^{-1}\big(\{y\}\big) = \emptyset$.*
- *Pour $y = 2$, l'équation a une unique solution $x = -\frac{-y}{2} = 1$. $f^{-1}\big(\{2\}\big) = \{1\}$.*
- *Pour $y > 2$, l'équation a deux solutions distinctes et on obtient*

$$f^{-1}\big(\{y\}\big) = \left\{ \frac{y + \sqrt{y^2-4}}{2}, \frac{y - \sqrt{y^2-4}}{2} \right\}.$$

5. *Pour tout $y \in [2, +\infty[$ et $x \in]0, 1]$,*

$$h(x) = y \Leftrightarrow x = \frac{y - \sqrt{y^2-4}}{2}.$$

En effet on obtient la même équation du second degré déjà résolue à la question précédente, dans son cas $\Delta \geq 0$ puisque $y \geq 2$. Si $y = 2$ la seule solution est $x = 1 = \frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}$. Si $y > 2$, la solution $\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2} > \frac{y}{2} > 1$ est éliminée car elle n'est pas dans $]0, 1]$ (ensemble de départ de h). On vérifie bien en revanche que pour tout $y \in [2, +\infty[$, $\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2} \in]0, 1]$. Ceci montre bien que h est bijective d'application réciproque

$$\begin{aligned} h^{-1} : [2, +\infty[&\to]0, 1] \\ y &\mapsto \frac{y - \sqrt{y^2-4}}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit $f : E \to F$ une application entre ensembles finis. On considère l'énoncé P suivant:

$$\big(\text{card}(E) < \text{card}(F)\big) \Longrightarrow \big(\exists y \in F, \forall x \in E, y \neq f(x)\big)$$

1. Enoncer la contraposée de P
2. L'énoncé P est-il vrai pour toutes les applications, ou pour certaines? Pourquoi?

. . . . . .

1. *La contraposée de $A \Longrightarrow B$ est $\text{non}B \Longrightarrow \text{non}A$. Voici donc la contraposée de P :*

$$\text{non}\big(\exists y \in F, \forall x \in E, y \neq f(x)\big) \Longrightarrow \text{non}\big(\text{card}(E) < \text{card}(F)\big),$$

c'est à dire

$$\big(\forall y \in E, \exists x \in E, y = f(x)\big) \Longrightarrow \big(\text{card}(E) \geq \text{card}(F)\big).$$

2. *La contraposée de P est exactement*

$$f \text{ surjective} \Longrightarrow \big(\text{card}(E) \geq \text{card}(F)\big).$$

Cette propriété est vraie pour toute application $f : E \to F$: on applique le point (3) du Théorème 2.2.5 du cours. Donc P est vraie pour toute application f

---

Exercice 4. Soit $f : E \to F$ une application.

1. Donnez une définition mathématique précise de la propriété "f est injective"
2. Décrivez explicitement toutes les applications injectives de $\{1, 2\}$ à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$, puis toutes les applications surjectives de $\{1, 2\}$ à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$.
3. On suppose que E et F sont finis et on note $m = \text{card}(E)$ et $n = \text{card(F)}$. Combien y a-t-il d'applications de E dans F, combien parmi ces applications sont injectives? Faites l'application numérique pour $m = 4$ et $n = 6$.
4. Soient $A, B \subset E$, montrez par double inclusion que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. Quelle relation est toujours vraie entre $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$? Démontrez-la.

.....

1. *f est injective si et seulement si $\forall x \in E, \forall y \in E$, $(f(x) = f(y)) \Longrightarrow (x = y)$.*

   On peut aussi dire : f est injective si et seulement si $\forall x \in F, \text{card}\big(f^{-1}(\{x\})\big) \leq 1$, ce qui signifie que tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent.

2. *Il y a six injections possibles de $\{1, 2\}$ à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$. On les note ici $f_1, f_2, \ldots, f_6$. Elles sont définies par:*

   $f_1(1) = 1$ *et* $f_1(2) = 2$. $\quad$ $f_2(1) = 1$ *et* $f_2(2) = 3$. $\quad$ $f_3(1) = 2$ *et* $f_3(2) = 3$.

   $f_4(1) = 2$ *et* $f_4(2) = 1$. $\quad$ $f_5(1) = 3$ *et* $f_5(2) = 1$. $\quad$ $f_6(1) = 3$ *et* $f_6(2) = 2$.

   Comme $\text{card}\,\{1, 2, 3\} > \text{card}\,\{1, 2\}$*, il n'y a pas d'application surjective de $\{1, 2\}$ à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$.*

3. *D'après des résultats du cours : il y a n^m applications de E dans F, parmi lesquelles $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \prod_{k=n-m+1}^{k=n} k$ sont injectives.*

   Pour $m = 4$ et $n = 6$, $6^4 = 1296$, $A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

4. *Supposons que $x \in f(A \cup B)$. Alors il existe $y \in A \cup B$ tel que $x = f(y)$. Puisque $y \in A \cup B$, on a $y \in A$ ou $y \in B$. Si $y \in A$, alors $x \in f(A) \subset f(A) \cup f(B)$. Si $y \in B$, alors $x \in f(B) \subset f(A) \cup f(B)$. Donc dans tous les cas $x \in f(A) \cup f(B)$. Donc $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.*

   Réciproquement, si $x \in f(A) \cup f(B)$, alors $x \in f(A)$ ou $x \in f(B)$. Si $x \in f(A)$, il existe $y \in A$ tel que $x = f(y)$, en particulier $y \in A \cup B$, donc $x \in f(A \cup B)$. Si $x \in f(B)$, il existe $y \in B$ tel que $x = f(y)$, en particulier $y \in A \cup B$, donc $x \in f(A \cup B)$. Donc dans tous les cas $x \in f(A \cup B)$. Donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

   Par double inclusion, on peut conclure que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

   On a toujours $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. En effet, si $x \in f(A \cap B)$, alors il existe $y \in A \cap B$ tel que $x = f(y)$. Puisque $y \in A \cap B$, on a $y \in A$ et $y \in B$. Puisque $y \in A$, alors $x \in f(A)$. Puisque $y \in B$, alors $x \in f(B)$. Donc $x \in f(A) \cap f(B)$.

   Remarque: il n'est pas vrai en général que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Par exemple pour $f : \{0, 1\} \to \{0\}$ définie par $f(0) = f(1) = 0$, si l'on pose $A = \{0\}$ et $B = \{1\}$ on a $f(A) \cap f(B) = \{0\}$ et $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$.