L1 SFA - Math4 - Contrôle continu 2

Durée 2H. Épreuve sans document ni calculatrice. Les étapes des raisonnements et les calculs doivent être détaillés et toutes les réponses justifiées. On veillera à donner les résultats sous forme simplifiée. Le correcteur retirera des points pour le manque de soin.

Exercice 1.

Dans un jeu de 32 cartes quelle est la probabilité d'avoir une main de 5 cartes contenant

1. un carré d'as ?
2. exactement deux rois ?
3. au moins deux rois ?

Indications :

On considère que la probabilité d'avoir une main est uniforme. Il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs numériques.

Exercice 2.

On range n objets dans n tiroirs ($n \geq 2$). Les objets et les tiroirs sont numérotés. Quelle est la probabilité d'avoir

1. aucun tiroir vide ?
2. un et un seul tiroir vide ?

Indication :

On considère que la probabilité d'avoir un rangement est uniforme.

Exercice 3.

Étudier la convergence et donner la limite (finie ou infinie) si elle existe des suites

1. $0.1, 0.12, 0.121, 0.1212, 0.12121, 0.121212, \dots$ (donner la limite sous la forme d'un quotient $\frac{p}{q}$, $q \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$),
2. $u_n = n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $n \geq 1$ (utiliser l'inégalité $\sin(x) \leq x$, $\forall x \geq 0$),
3. $v_n = n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $n \geq 0$,
4. $w_n = \frac{(n+1)^3 - n^3}{(n-1)^3 - n^3}$, $n \geq 0$.

Exercice 4.

Pour $n \geq 1$, on définit les suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ par

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{et} \quad y_n = x_n + \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

1. Calculer x_1, x_2, x_3 et y_1, y_2, y_3 .

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est croissante et la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
3. Montrer que ces deux suites convergent et ont une même limite, notée l .
4. Pour quelles valeurs de n a-t-on un encadrement de l à 10^{-4} près ?

Exercice 5.

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$u_0 \geq 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}, \forall n \geq 0.$$

1. Montrer que $u_n \geq 0, \forall n$, et que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est monotone.
2. Déterminer dans le cas où $(u_n)_{n \geq 0}$ a une limite finie la valeur unique de cette limite.
3. Étudier suivant les valeurs de $u_0 \geq 0$ la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.