Module Mathématiques 4
Corrigé du contrôle continu 2 du jeudi 4 juin 2015

Barème :

Ex. 1 (total : 3 points) 1) 1, 2) 1, 3) 1. Ex. 2 (total : 4 points) 1) 2, 2) 2. Ex. 3 (total : 4 points) 1) 1, 2) 1, 3) 1, 4) 1. Ex. 4 (total : 6 points) 1) 1, 2) 2, 3) 2, 4) 1. Ex. 5 (total : 4 points) 1) 1, 2) 1, 3) 2.

Exercice 1.

L'ensemble Ω des résultats possibles est l'ensemble des sous-ensembles de cardinal 5 de l'ensemble des 32 cartes du jeu. Son cardinal est donc

$$\text{card}(\Omega) = \binom{32}{5} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{5!}$$

Puisque la probabilité est supposé uniforme, la probabilité de tout événement $A \subset \Omega$ est donnée par

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

1. On considère l'événement A_1 qui est l'ensemble des mains contenant un carré d'as. Chaque main de A_1 est donc caractérisée par la carte qui n'est pas un as. On a ainsi $\text{card}(A_1) = 28$, le nombre de cartes du jeu qui ne sont pas des as. On en déduit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_1] &= \frac{28 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28} \\ &= \frac{1}{8 \cdot 31 \cdot 29} \\ &\approx 0.000139043381535 \end{aligned}$$

2. On considère l'événement A_2 qui est l'ensemble des mains contenant exactement deux rois. Chaque main de A_2 est caractérisée par :

- le choix de deux rois parmi les quatre rois, dont le nombre de possibilités est $\binom{4}{2} = 6$
- le choix des trois autres cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des rois, dont le nombre de possibilités est $\binom{28}{3} = 28 \cdot 27 \cdot 26 / (3 \cdot 2)$

Il en découle que $\text{card}(A) = 6 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 / (3 \cdot 2) = 28 \cdot 27 \cdot 26$, puis que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_2] &= \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28} \\ &= 27 \cdot 26 \cdot \mathbb{P}[A_1] \\ &= \frac{27 \cdot 13}{4 \cdot 31 \cdot 29} \\ &\approx 0.0976084538375973 \end{aligned}$$

3. On considère l'événement A_3 qui est l'ensemble des mains contenant au moins deux rois. Comme ci-dessus, on calcule que le nombre de mains contenant exactement trois rois est $\binom{4}{3} \binom{28}{2}$ et que le nombre

de mains contenant un carré de rois est $\binom{28}{1}$. Il en découle que

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}[A_3] &= \frac{6\binom{28}{3} + 4\binom{28}{2} + \binom{28}{1}}{\text{card}(\Omega)} \\
 &= \mathbb{P}[A_2] + \frac{4\binom{28}{2}}{\text{card}(\Omega)} + \mathbb{P}[A_1] \\
 &= \mathbb{P}[A_2] + 54\frac{28}{\binom{32}{5}} + \mathbb{P}[A_1] \\
 &= \mathbb{P}[A_2] + 55\mathbb{P}[A_1] \\
 &\approx 0.1052558398220245
 \end{aligned}$$

(la probabilité d'avoir au moins deux rois est donc à peine plus grande que celle d'avoir juste deux rois, ceci n'était évidemment pas demandé puisque l'on ne disposait pas de calculatrice pour les calculs numériques).

Exercice 2.

Un rangement consiste à assigner à chaque objet 1, 2, 3, ..., n un numéro de tiroir parmi 1, 2, 3, ..., n . Le cardinal de l'ensemble Ω des rangements possibles est donc n^n . Puisque la probabilité est supposé uniforme, la probabilité de tout événement $A \subset \Omega$ est donnée par

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

1. On considère A_1 l'ensemble des rangements où aucun tiroir n'est vide. Chaque objet a été placé dans un tiroir différent, les éléments de A_1 sont donc des bijections de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ dans lui-même. On obtient ainsi $\text{card}(A_1) = n!$ et

$$\mathbb{P}[A_1] = \frac{n!}{n^n}$$

2. On considère A_2 l'ensemble des rangements où un et un seul tiroir est vide. De tels rangements ont donc un seul tiroir qui contient deux objets, les autres tiroirs (qui ne sont ni vides ni contenant deux objets) contiennent exactement un objet. De tels rangements sont donc caractérisés par le numéro du tiroir vide (n possibilités), celui qui contient deux objets ($n - 1$ possibilités), les deux objets de ce tiroir ($\binom{n}{2}$ possibilités) et une bijection entre les $n - 2$ objets restants et les $n - 2$ tiroirs restants. Au final, on obtient $\text{card}(A_2) = n(n - 1)\binom{n}{2}(n - 2)! = \binom{n}{2}n!$, d'où

$$\mathbb{P}[A_2] = \frac{n(n - 1)}{2} \frac{n!}{n^n}$$

Exercice 3.

1. On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ où x_n est de partie entière nulle et a n décimales après la virgule, consistant en une alternance de 1 et de 2. Cette suite est croissante et majorée par 1, elle converge donc. Notons l sa limite. On remarque que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 100x_{n+2} &= 12, \underbrace{12121\dots}_{n \text{ termes}} \\
 &= 12 + x_n
 \end{aligned}$$

En passant à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient $100l = 12 + l$, c'est-à-dire

$$l = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

2. Pour $n \geq 1$, on a $0 \leq 1/n^2 \leq 1 < \pi$, d'où $\sin(1/n^2) \geq 0$. D'après l'inégalité rappelée, on obtient donc

$$0 \leq \sin(1/n^2) \leq 1/n^2$$

d'où, après multiplication par n ,

$$0 \leq u_n \leq 1/n$$

Les termes de gauche et de droite convergent vers 0 pour n grand, le théorème des gendarmes impose donc que u_n converge vers 0.

3. On remarque que la suite $(n\pi/2)_{n \in \mathbb{N}}$ vaut $(0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi, \dots)$, ainsi la suite $(\sin(n\pi/2))_{n \in \mathbb{N}}$ vaut $(0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots)$. Ainsi il apparaît que

$$\begin{aligned} \lim_{n/r \rightarrow \infty} v_{2n} &= 0 \\ \lim_{n/r \rightarrow \infty} v_{2n+1} &= +\infty \\ \lim_{n/r \rightarrow \infty} v_{2n+3} &= -\infty \end{aligned}$$

et la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, puisque certaines de ses sous-suites convergent vers des limites différentes.

4. Notons que pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - n^3 &= 3n^2 + 3n + 1 = n^2(3 + 3/n + 1/n^2) \\ (n-1)^3 - n^3 &= -3n^2 + 3n - 1 = n^2(-3 + 3/n - 1/n^2) \end{aligned}$$

Il en ressort que pour $n \geq 1$,

$$w_n = \frac{3 + 3/n + 1/n^2}{-3 + 3/n - 1/n^2}$$

Le numérateur converge vers 3 et le dénominateur vers -3, ce qui implique que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers -1 pour n grand.

Exercice 4.

1. On calcule que $x_1 = 1/2$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = 3/4$, $y_1 = 3/2$, $y_2 = 7/6$ et $y_3 = 13/12$.

Pour tout $n \geq 1$, on a $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \geq 0$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc croissante. On calcule également que

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= x_{n+1} - x_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} \right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

2. La suite décroissante $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant minorée (par 0), elle converge. La suite croissante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée, car pour tout $n \geq 1$, on a $x_n \leq y_n \leq y_1 = 3/2$. Elle est donc convergente. Notons que pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq y_n - x_n \leq \frac{1}{n}$$

ainsi en passant à la limite, on obtient

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Appelons l cette limite commune. Pour tout $n \geq 1$, on a $x_n \leq l \leq y_n$, par monotonie. Ainsi on aura un encadrement de l à 10^{-4} , si $y_n - x_n \leq 10^{-4}$, ce qui revient à $1/n \leq 10^{-4}$, c'est-à-dire $n \geq 10^4$.

Exercice 5.

1. Par définition $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = (u_{n-1}^2 + 1)/2 \geq 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc à valeurs positives ou nulles. Ainsi il s'agit d'une suite définie par u_0 et par la récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

où $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est la fonction donnée par $f(x) = (x^2 + 1)/2$ pour tout $x \geq 0$. Pour voir que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, il suffit de voir que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, ce qui est évident.

2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite l , celle-ci vérifie nécessairement $f(l) = l$, c'est-à-dire $l^2 + 1 = 2l$, ce qui s'écrit aussi $(l - 1)^2 = 0$. La seule limite possible est 1.

3. Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante : il suffit de vérifier que $f(u_0) \geq u_0$, car f est croissante. Or $f(u_0) - u_0 = (u_0^2 + 1)/2 - u_0 = (u_0 - 1)^2/2 \geq 0$, d'où la croissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Considérons trois cas :

- Si $u_0 = 1$, puisque 1 est un point fixe de f , on a $u_n = 1$ pour tout $n \geq 0$ et la suite stationnaire $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

- Si $u_0 \in [0, 1[$, montrons par récurrence que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq 1$. C'est vrai pour $n = 0$ par hypothèse. Si pour un $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq 1$, alors par croissance de f , $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(1) = 1$, ce qui prouve la propriété voulue pour $n + 1$. La suite croissante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc majorée, elle doit converger et on a déjà vu que sa seule limite possible était 1, donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1 (notons que le cas précédent aurait aussi pu être traité de cette manière).

- Si $u_0 > 1$, supposons par l'absurde que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. Il en résulterait par croissance qu'elle convergerait vers une limite l satisfaisant $l \geq u_0 > 1$. Or on a vu ci-dessus que l doit être égal à 1, ce qui constitue une contradiction. Par suite la suite croissante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée, sa limite est donc $+\infty$.