L1 SFA - Math4 - Contrôle continu 1

Durée 2H. Épreuve sans document ni calculatrice. Les étapes des raisonnements et les calculs doivent être détaillés et toutes les réponses justifiées. On veillera à donner les résultats sous forme simplifiée. Le correcteur retirera des points pour le manque de soin.

Exercice 1.

On considère la proposition

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, ((x = 3y) \vee (x = 3y + 1) \vee (x = 3y + 2)).$$

1. Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.
2. Donner la négation de cette proposition.

Exercice 2.

Soient A, B deux ensembles. On rappelle que $A \Delta B$ (différence symétrique de A et B) est définie par

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Montrer que

$$(A \Delta B) \Delta B = A.$$

On montrera pour cela les deux inclusions $(A \Delta B) \Delta B \subset A$ et $A \subset (A \Delta B) \Delta B$.

2. Soit E un ensemble et B un sous-ensemble fixé de E . On considère l'application ϕ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par

$$\phi(A) = A \Delta B,$$

où A est un sous-ensemble de E .

En utilisant la question 1) montrer que $\phi \circ \phi = Id_{\mathcal{P}(E)}$. En déduire que ϕ est bijective.

Exercice 3.

Soit $f : E \rightarrow E$ une application. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $f^{(n)}$ la composée de f , n fois :

$$f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

Pour $n = 0$, on pose $f^{(0)} = Id_E$.

1. On prend $E = \mathbb{N}$ et $f(x) = 2x$. Que vaut $f^{(n)}(x)$?
2. On prend $E = \mathbb{N}$ et $f(x) = 2x + 1$. Que vaut $f^{(n)}(x)$?

Indication : Pour démontrer les résultats utiliser des preuves par récurrence.

Exercice 4.

1. Donner le nombre de mots de longueur N formés à l'aide des trois lettres a, b, c .
2. Donner le nombre de mots de longueur N contenant k lettres a et $N - k$ lettres b (on suppose $k \leq N$).
3. Donner le nombre de mots de longueur N contenant k lettres a , l lettres b et $N - k - l$ lettres c (on suppose $k + l \leq N$). Donner une forme simplifiée de l'expression obtenue.

Indication : Les mots de longueur 2 formés à l'aide des deux lettres a et b sont aa, ab, ba, bb .