Epreuve de substitution

Durée 2H. Epreuve sans document ni calculatrice. Les étapes des calculs doivent être détaillées et toutes les réponses justifiées. On veillera à donner les résultats sous forme simplifiée. Le correcteur retirera des points pour le manque de soin.

Question de cours:

1. Donner la définition mathématique précise de l'énoncé "la suite (u_n) tend vers $+\infty$ ".
2. Donner la définition mathématique précise de l'énoncé "la suite (v_n) est minorée".
3. On suppose que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ et que la suite (v_n) est minorée. Que peut-on dire de la convergence de la suite $(u_n + v_n)$? Démontrez-le en détail.

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(1 - x)$ et soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad n \geq 0.$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$ et l'inéquation $f(x) \leq x$.
2. Représenter graphiquement les termes de la suite lorsque $a = \frac{1}{2}$ et lorsque $a = -1$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante (et ce quelle que soit la valeur de a).
4. On suppose dans cette question que $a \in [0, 1]$.
 - (a) Montrer que $f([0, 1]) \subset [0, \frac{1}{4}]$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
 - (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
5. On suppose dans cette question que $a < 0$. Montrer que la suite est divergente. Quel est son comportement lorsque n tend vers l'infini?
6. Quel est le comportement de la suite lorsque $a > 1$?

Exercice 2. Soit E un ensemble fini. On rappelle que $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E . On considère l'ensemble $\mathcal{B}(E)$ défini par:

$$\mathcal{B}(E) := \{(X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E); X \cap Y = \emptyset\}.$$

1. Calculer $\text{card}(\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E))$ en fonction de $n := \text{card}(E)$.
2. Décrivez en extension les ensembles $\mathcal{B}(\{1\})$ et $\mathcal{B}(\{1, 2\})$.
3. On note $\mathcal{F}(A, B)$ pour l'ensemble des applications de A dans B . Quel est le cardinal de $\mathcal{F}(E, \{0, 1, 2\})$?
4. On note $\mathbf{1}_S$ pour la fonction indicatrice d'un ensemble $S \subset E$. Montrer que l'application suivante est bien définie et bijective.

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{B}(E) &\longrightarrow \mathcal{F}(E, \{0, 1, 2\}) \\ (X, Y) &\longmapsto \mathbf{1}_X + 2 \cdot \mathbf{1}_Y \end{aligned}$$

5. Exprimer le cardinal de $\mathcal{B}(E)$ en fonction du cardinal de E .