Contrôle continu 2

Durée 2H. Epreuve sans document ni calculatrice. Les étapes des calculs doivent être détaillées et toutes les réponses justifiées. On veillera à donner les résultats sous forme simplifiée. Le correcteur retirera des points pour le manque de soin.

Exercice 1.

1. A quelle condition un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ admet-il une borne supérieure? Rappeler la définition précise de $\sup(A)$.
2. Donner la définition mathématique précise de l'énoncé "la suite (u_n) est majorée".
3. Donner la définition mathématique précise de l'énoncé "la suite (u_n) converge".
4. Montrez, à partir de ces définitions, que toute suite croissante et majorée converge.

Exercice 2.

1. Construire la partie du triangle de Pascal qui contient tous les nombres $\binom{n}{p}$ pour $0 \leq p \leq n \leq 6$.
2. Développer $(x + y)^6$.
3. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n := (n + 1)^6 - (n - 1)^6$.
4. Etudier la convergence de $v_n := \frac{(n + 1)^6 - (n - 1)^6 - 12n^5 + n^2 \sin(n)}{3^{-n} + n^3}$.

Exercice 3. Pour $n \geq 1$ on définit

$$x_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad y_n := x_n + \frac{1}{n^2}.$$

1. Calculer x_2, y_2, x_3 et y_3 .
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est croissante et que la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
3. Montrer que ces deux suites convergent et ont même limite, notée ℓ .
4. Comment obtenir un encadrement de ℓ à 10^{-4} près?

Exercice 4. On rappelle que $\llbracket 1, n \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n au sens large.

1. Combien y-a-t'il d'applications de $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ à valeurs dans $\llbracket 1, 10 \rrbracket$?
2. Parmi ces applications, combien sont injectives, combien sont surjectives?
3. Quelle est la probabilité pour qu'une application de $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ à valeurs dans $\llbracket 1, 10 \rrbracket$, choisie au hasard et uniformément, ne soit pas injective?
4. Combien d'applications de $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ à valeurs dans $\llbracket 1, 10 \rrbracket$ sont strictement croissantes?