Contrôle continu 1

Durée 2H. Epreuve sans document ni calculatrice. Les étapes des raisonnements et des calculs doivent être détaillées et toutes les réponses justifiées. On veillera à donner les résultats sous forme simplifiée. Le correcteur retirera des points pour le manque de soin.

Question de cours: Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Quand dit-on que f est injective? Quand dit-on qu'elle est surjective?

Exercice 1. On travaille ici dans l'ensemble des nombres réels. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère l'énoncé $P(a)$ suivant: $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \geq x, \forall z > y, e^{ay^2} > e^{az^2}$.

1. Expliciter la négation de $P(a)$.
2. Expliquer le sens de $P(a)$ avec des mots (simples).
3. Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ l'énoncé $P(a)$ est-il vrai ou faux? Démontrez-le (on pourra distinguer des cas suivant le signe de a).

Exercice 2.

1. Soit $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $c(x) = x^2$. Donner une expression simple pour les ensembles suivants:

$$c([-1, 2]), \quad c([-2, 1]), \quad c([-1, 2] \cap [-2, 1]), \quad c^{-1}([-1, 2]), \quad c^{-1}([-2, 1]).$$

2. Soit $f : E \rightarrow F$ une application et C, D des sous-ensembles de E . Démontrer que

$$f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D).$$

En utilisant les exemples de la première question, montrer que l'inclusion dans l'autre sens n'est pas toujours vraie.

3. Soit $f : E \rightarrow F$ une application et A, B des sous-ensembles de F . Démontrer que

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

$$\text{et} \quad f(f^{-1}(A)) = A \cap f(E).$$

Exercice 3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}.$$

1. Calculer u_2 et u_3 .
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un entier relatif.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2^n - (-3)^n}{5}$.