L1 Maths 4 : Correction du contrôle continu 1.

Question de cours.

- 1) f est surjective si $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.
- 2) f est injective si $\forall x \in E, \forall y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Exercice 1

- 1) La négation de $P(a)$ est : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \geq x, \exists z > y, e^{ay^2} \leq e^{az^2}$.
- 2) $P(a)$ énonce qu'il existe un nombre réel x tel que l'application $t \mapsto e^{at^2}$ est strictement décroissante sur $[x, +\infty[$.
- 3) Si $a < 0$, $P(a)$ est vraie puisque la fonction $t \mapsto e^{at^2}$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ (car $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et l'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$).

Si $a \geq 0$, $P(a)$ est faux puisque la fonction $t \mapsto e^{at^2}$ est décroissante sur $] - \infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$ (pour $a = 0$ la fonction est même constante). Il n'existe donc pas d'intervalle de type $[x, +\infty[$ sur lequel cette fonction est strictement décroissante.

Autre preuve dans la cas $a \geq 0$: on peut établir $nonP(a)$:

Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. On choisit $y := |x|$ et $z := |x| + 1$; on a bien $z > y \geq x$. De plus $z > y \geq 0$ donc $z^2 \geq y^2$ et puisque $a \geq 0$ et l'exponentielle est croissante, on a bien $e^{ay^2} \leq e^{az^2}$.

Exercice 2

- 1) On utilise la définition de l'image directe d'un ensemble par une application : $c([-1, 2]) = \{c(x) \mid x \in [-1, 2]\} = \{x^2 \mid x \in [-1, 2]\} = [0, 4]$. Pour la dernière égalité on a utilisé que la fonction "carré" vérifie $c(-1) = 1, c(0) = 0, c(2) = 4$ et qu'elle est décroissante sur $[-1, 0]$ et croissante sur $[0, 2]$.

De même on obtient que $c([-2, 1]) = [0, 4]$ et $c([-1, 2] \cap [-2, 1]) = c([-1, 1]) = [0, 1]$.

En utilisant la définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application :

$$c^{-1}([-1, 2]) = \{x \in \mathbb{R}; c(x) \in [-1, 2]\} = \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x^2 \leq 2\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

De même on obtient que $c^{-1}([-2, 1]) = [-1, 1]$.

- 2) Pour prouver l'inclusion $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$ on montre que tout élément du premier ensemble est aussi élément du second :

Soit $y \in f(C \cap D)$ quelconque. Alors par définition il existe $x \in C \cap D$ tel que $y = f(x)$. En particulier $x \in C$ et comme $y = f(x)$ on obtient que $y \in f(C)$. De même $x \in D$ et comme $y = f(x)$ on obtient que $y \in f(D)$. Nous avons montré que $y \in f(C)$ et $y \in f(D)$; on en déduit que $y \in f(C) \cap f(D)$.

La réciproque n'a pas lieu. L'exemple précédent montre que

$$c([-1, 2]) \cap c([-2, 1]) = [0, 4] \neq c([-1, 2] \cap [-2, 1]) = c([-1, 1]) = [0, 1].$$

- 3) 3.1)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A \cap B) &\Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \\ &\Leftrightarrow f(x) \in A \text{ et } f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \text{ et } x \in f^{-1}(B) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \end{aligned}$$

3.2) On procède par double inclusion.

Montrons d'abord que $f(f^{-1}(A)) \subset A \cap f(E)$:

Soit $y \in f(f^{-1}(A))$ quelconque, alors il existe $x \in f^{-1}(A)$ tel que $y = f(x)$. Or $x \in f^{-1}(A)$ signifie que $f(x) \in A$. On en déduit que $y \in A$. Ainsi on a montré que $f(f^{-1}(A)) \subset A$.

Puisque $f^{-1}(A) \subset E$ on a aussi $f(f^{-1}(A)) \subset f(E)$.

Les deux inclusions obtenues permettent de conclure que $f(f^{-1}(A)) \subset A \cap f(E)$.

Montrons maintenant que $A \cap f(E) \subset f(f^{-1}(A))$:

Soit $y \in A \cap f(E)$. Alors $y \in A$ et il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On en déduit que $f(x) \in A$, soit $x \in f^{-1}(A)$. Donc $y = f(x) \in f(f^{-1}(A))$.

Exercice 3

1) $u_2 = -1, u_3 = 7$.

2) On procède par récurrence à deux pas :

Initialisation : Il est vrai que $u_0 \in \mathbb{Z}$ et $u_1 \in \mathbb{Z}$.

Hérédité à deux pas : Soit $n \geq 0$ quelconque. Supposons que u_n et u_{n+1} sont dans $\mathbb{Z}$. Alors

$u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1} \in \mathbb{Z}$.

3) On procède par récurrence à deux pas :

Initialisation : On a $u_0 = 0 = \frac{2^0 - (-3)^0}{5}$ et $u_1 = 1 = \frac{2^1 - (-3)^1}{5}$.

Hérédité à deux pas : Soit $n \geq 0$ quelconque. Supposons que $u_n = \frac{2^n - (-3)^n}{5}$ et

$u_{n+1} = \frac{2^{n+1} - (-3)^{n+1}}{5}$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 6u_n - u_{n+1} = 6 \frac{2^n - (-3)^n}{5} - \frac{2^{n+1} - (-3)^{n+1}}{5} \\ &= \frac{3 \times 2^{n+1} + 2(-3)^{n+1} - 2^{n+1} + (-3)^{n+1}}{5} = \frac{2^{n+2} - (-3)^{n+2}}{5}. \end{aligned}$$