Examen de rattrapage

Durée 2H. Epreuve sans document ni calculatrice. Les étapes des calculs doivent être détaillées et toutes les réponses justifiées.

Exercice 1.

1. On définit $I := [0, 2]$, $J := [1, 3[$ et $K :=]3, 4[\cup]0, 1[$. Donner les valeurs de $\sup(I)$, $\sup(J)$, $\sup(K)$, $\sup(I \cap J)$, $\sup(I \cap K)$.
2. Soient A et B des sous-ensembles majorés de $\mathbb{R}$. On suppose que $A \cap B \neq \emptyset$.
 - (a) Montrer que $\min(\sup(A), \sup(B))$ est un majorant de $A \cap B$.
 - (b) En déduire que $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$.

Exercice 2. Soient $m \leq n$ des entiers naturels non nuls. On note $\llbracket 1, m \rrbracket := \{1, 2, \dots, m\}$.

1. Combien existe-t-il d'applications de $\llbracket 1, m \rrbracket$ à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$? Parmi ces applications, combien sont injectives?
2. On note $\mathcal{C}(m, n)$ l'ensemble des applications strictement croissantes de $\llbracket 1, m \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ et on note $\mathcal{P}_m(\llbracket 1, n \rrbracket)$ l'ensemble des sous-ensembles de cardinal m de $\llbracket 1, n \rrbracket$.
 - (a) Décrire en extension les ensembles $\mathcal{C}(2, 2)$ et $\mathcal{C}(2, 3)$.
 - (b) Montrer que si $f \in \mathcal{C}(m, n)$ alors f est injective.
 - (c) Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \theta : \mathcal{C}(m, n) & \rightarrow & \mathcal{P}_m(\llbracket 1, n \rrbracket) \\ f & \mapsto & f(\llbracket 1, m \rrbracket) \end{array}$$

est bien définie, surjective et injective. En déduire le cardinal de $\mathcal{C}(m, n)$.

Exercice 3. Pour $n \geq 1$ on définit $u_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer par une minoration simple que pour tout $n \geq 1$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.
3. Si l'on suppose que (u_n) converge, montrer que la suite $(u_{2n} - u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite à déterminer. Montrer que ceci contredit le résultat de la question précédente et en déduire que (u_n) est divergente, puis que $\lim u_n = +\infty$.
4. On définit $z_n := u_n - \ln(n+1)$. Montrer que (z_n) est croissante. On pourra utiliser, sans la démontrer, l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$.
5. Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt = \ln(k) - \ln(k-1)$.
6. En déduire par récurrence que $u_n \leq 1 + \ln(n)$ pour tout $n \geq 1$. Démontrer que (z_n) est convergente. Donner un encadrement de sa limite.