Contrôle Terminal

Durée 2H. Epreuve sans document ni calculatrice. Les étapes des calculs doivent être détaillées et toutes les réponses justifiées.

Question de cours: On suppose que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a et que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers b . Démontrer, à partir des définitions, que la suite $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $a + b$.

Exercice 1. On étudie une version simplifiée du loto. Un tirage de ce loto consiste en deux nombres tirés au sort dans l'ensemble $\llbracket 1, 10 \rrbracket = \{1, 2, \dots, 10\}$ (l'ordre de tirage ne compte pas, le tirage donne une paire de nombres).

1. On note Ω l'ensemble des tirages possibles. Calculer le cardinal de Ω .
2. Un joueur mise sur deux nombres (9 et 10 pour fixer les idées). Combien y a-t-il de tirages possibles qui ne contiennent aucun des numéros sur lesquels le joueur a parié? Combien contiennent exactement un des numéros choisis par le joueur?
3. On suppose les tirages équiprobables: on munit donc $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme notée $\mathbb{P}$. Pour $k = 0$, $k = 1$ et $k = 2$, calculer la probabilité que le joueur ait k bons numéros.
4. Le joueur gagne 1€ s'il a un bon numéro et 10€ s'il a les deux bons numéros. Calculer l'espérance de gain.

Exercice 2. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x(1 - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. On va étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}([0, +\infty[)$. Est-ce que f est injective?
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ et l'inéquation $f(x) \geq x$.
3. Etudier les variations de f et tracer son graphe. Construire graphiquement les premiers termes de la suite lorsque $a = \frac{1}{4}$ et lorsque $a = -\frac{1}{4}$.
4. On suppose dans cette question que $a \in [0, \frac{1}{2}]$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$.
 - (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
 - (c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite en fonction de $u_0 = a$.
5. Montrer que pour tout x réel, $f(x) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(1 - 2x)^2$. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(1 - 2a)^{2^n}.$$

6. On suppose maintenant $a < 0$. En utilisant la formule précédente, étudiez la convergence de la suite (u_n) .