Devoir surveillé

Durée 2H. Epreuve sans document ni calculatrice. Les étapes des calculs doivent être détaillées et toutes les réponses justifiées.

Exercice 1. On note P l'énoncé suivant: $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \leq x, y^2 \leq x^2$.

1. Expliciter la négation de P .
2. L'énoncé P est-il vrai ou faux? Démontrez-le.

Exercice 2.

1. Soit $f : E \rightarrow F$ une application et $B \subset F$. Démontrer que

$$f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B).$$

2. On note $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction cosinus. Déterminer $\cos^{-1}(\{0, -1\})$.

Exercice 3.

1. Combien y-a-t-il de bijections de $\mathcal{P}([1, n])$ dans $\mathcal{P}([1, n])$? Construisez explicitement deux exemples de telles bijections.
2. On note $E = \{-1, 0, 1\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
 - (a) Combien y a-t-il d'applications de E à valeurs dans F ?
 - (b) Parmi ces applications, combien sont injectives? Combien sont surjectives?
 - (c) Dénombrer les applications f de E dans F qui vérifient $f(0) = 4$.

Exercice 4. Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer par récurrence sur n que pour tout entier $n \geq p$ on a:

$$\sum_{k=p}^{k=n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}. \quad (1)$$

2. Interpréter cette relation sur le triangle de Pascal.
3. Expliciter la formule (??) pour $p = 1$ puis $p = 2$.
4. En déduire une expression courte de $\sum_{k=1}^n k$, puis qu'il existe un nombre c , à déterminer, tel que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = cn(n+1)(2n+1).$$