Examen de rattrapage

Durée 2H. Epreuve sans document ni calculatrice. Les étapes des calculs doivent être détaillées et toutes les réponses justifiées.

Exercice 1. On note $E = \{-1, 0, 1\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. Combien y a-t-il d'applications de E à valeurs dans F ?
2. Parmi ces applications, combien sont injectives? Combien sont surjectives?
3. Dénombrer les applications f de E dans F qui vérifient $f(0) = 4$.
4. Dénombrer les applications strictement croissantes de E dans F .

Exercice 2. Etudier la convergence des suites suivantes:

$$a_n = \frac{1 + n^3}{\sqrt{n+2}}, \quad b_n = \frac{(n+1)^3 - (n+2)^3}{n^2 + 3}.$$

Exercice 3.

1. Enoncer la définition mathématique de l'assertion "la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ ".
2. Démontrer à partir des définitions que toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x(1-x)$ et soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n), \quad n \geq 0.$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$ et l'inéquation $f(x) \leq x$.
2. Représenter graphiquement les termes de la suite lorsque $a = \frac{1}{2}$ et lorsque $a = -1$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante (et ce quelle que soit la valeur de a).
4. On suppose dans cette question que $a \in [0, 1]$.
 - (a) Montrer que $f([0, 1]) \subset [0, \frac{1}{4}]$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
 - (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
5. On suppose dans cette question que $a < 0$. Montrer que la suite est divergente. Quel est son comportement lorsque n tend vers l'infini?
6. Quel est le comportement de la suite lorsque $a > 1$?