Contrôle terminal

Durée 2h. Epreuve sans document ni calculatrice. Les étapes de calcul doivent être détaillées et toutes les réponses justifiées. On veillera à donner les résultats sous forme simplifiée.

Exercice 1. Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soit A un sous-ensemble de E et B, C des sous-ensembles de l'ensemble F .

- 1) Rappeler la définition de $f(A)$ et de $f^{-1}(B)$.
- 2) Montrer que $f^{-1}(B \cup C) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C)$.
- 3) Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.

Exercice 2. Pour $n \geq 1$ on définit

$$u_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n := u_n + \frac{1}{n}.$$

- 1) Calculer u_2 et u_3 .
- 2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
- 3) Montrer que ces deux suites convergent et ont même limite, notée α .
- 4) Comment obtenir un encadrement de α à 10^{-3} près ?

Exercice 3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = 2 + \sqrt{x}$. Soit $a \geq 0$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation $f(x) = x$ et l'inéquation $f(x) \geq x$. Indication : on pourra se ramener à un équation du second degré.
- 2) Tracer le graphe de f . Représenter sur le graphe les valeurs de la suite pour les choix $a = 1$ et $a = 9$.
- 3) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Préciser son sens de variation en fonction de la valeur de a .
- 4) Montrer que la suite converge vers une limite ℓ à préciser. Indication : on pourra commencer par le cas $a \geq \ell$ qui est plus simple.
- 5) Montrer que $|u_{n+1} - \ell| \leq |u_n - \ell|/2$ et en déduire une majoration de $|u_n - \ell|$ ne dépendant que de n et $|a - \ell|$.

Exercice 4. Soient A, B des parties non-vides et majorées de $\mathbb{R}$.

- 1) Donner la définition de $\sup(A)$.
- 2) Montrer que $A \cup B$ est majoré et que $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup(A), \sup(B))$.