Devoir Surveillé

Durée 2h. Epreuve sans document ni calculatrice. Les étapes de calcul doivent être détaillées et toutes les réponses justifiées. On veillera à donner les résultats sous forme simplifiée. N'oubliez pas de préciser votre nom, votre section et votre groupe de TD sur les copies.

Exercice 1. Soient $f : E \rightarrow F$ une application et A, B des sous-ensembles de l'ensemble F .

1. Montrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
2. Montrer que $f(f^{-1}(A)) = A \cap f(E)$.

Exercice 2. Démontrer par récurrence que pour tout réel $x \neq 1$ et tout entier $n \geq 1$, on a la formule suivante (où par convention $x^0 = 1$) :

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Exercice 3.

1. Combien y a-t-il d'applications injectives de $\{1, 2, 3, 4\}$ dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?
2. Dénombrer les sous-ensembles de l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}; 1 \leq n \leq 20\}$ dont le cardinal est inférieur ou égal à 3.
3. Soit E un ensemble de cardinal n . Combien y a-t-il d'applications d'ensemble de départ $\mathcal{P}(E)$ et d'ensemble d'arrivée E ?

Exercice 4. Soit E un ensemble fini. On considère l'ensemble $\mathcal{B}(E)$ défini comme suit :

$$\mathcal{B}(E) := \{(X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E); X \cap Y = \emptyset\}.$$

1. Décrivez (en extension) les ensembles $\mathcal{B}(\{1\})$ et $\mathcal{B}(\{1, 2\})$.
2. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{B}(E) &\longrightarrow \mathcal{F}(E, \{0, 1, 2\}) \\ (X, Y) &\longmapsto \mathbf{1}_X + 2 \cdot \mathbf{1}_Y \end{aligned}$$

est une bijection. Expliciter la bijection réciproque. On a noté $\mathcal{F}(A, B)$ pour l'ensemble des applications de A dans B , et $\mathbf{1}_S$ pour la fonction indicatrice d'un ensemble $S \subset E$.

3. Exprimer le cardinal de $\mathcal{B}(E)$ en fonction du cardinal de E .