Université Paul Sabatier — **Toulouse**
L1 IMP Math 2 — **Année 2010-2011**

EXAMEN PARTIEL

Jeudi 4 novembre 2010
Durée 1h30

Epreuve sans document ni calculatrice. Les étapes de calcul doivent être détaillées et toutes les réponses justifiées. On veillera à donner les résultats sous forme simplifiée.

N'oubliez pas de préciser votre nom, votre section et votre groupe de TD sur les copies. Si vous rendez plusieurs copies, pensez à les numéroter.

Exercice 1 [3 points]
Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrez par récurrence sur n que, pour tout $n \geq 1$

$$x^n - 1 = (x-1)(1 + x + \ldots + x^{n-1}).$$

Exercice 2 [4 points]

(a) Quel est le nombre d'injections de $\{1,2,3\}$ dans $\{1,2,3,4,5,6,7\}$?

(b) Quel est le nombre d'injections de $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ dans $\{1,2,3\}$?

(c) Quel est le nombre d'applications de $\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})$ dans $\{1,2\}$?

Exercice 3 [3 points]
En écrivant le triangle de Pascal jusqu'à un rang adapté, donnez le développement de $(1-x)^8$.

Exercice 4 [7 points]
Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. Montrez que

(a) $A \subset B \iff A \cup B \subset B$.

(b) $A \subset B \iff A \subset B \cap A$.

(c) $A \subset B \iff 1_A \leq 1_B$.

Exercice 5 [9 points]

(a) Soit $E = \{1,2,3\}$. Décrire explicitement $\mathcal{P}(E)$ et montrer qu'il y a autant de parties de E de cardinal pair que de parties de E de cardinal impair.

(b) Soit E un ensemble fini et non vide. On considère un élément $e \in E$ et l'application $F : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ qui est définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{si } e \notin A, \ F(A) = A \cup \{e\}, \\ \text{si } e \in A, \ F(A) = A \setminus \{e\}. \end{cases}$$

(1) Montrer que $F \circ F = Id_{\mathcal{P}(E)}$.

(2) On appelle $\mathcal{P}_p$ l'ensemble des parties de E ayant un cardinal pair et $\mathcal{P}_i$ l'ensemble des parties de E ayant un cardinal impair. Montrer que $F(\mathcal{P}_i) \subset \mathcal{P}_p$ et $F(\mathcal{P}_p) \subset \mathcal{P}_i$.

(3) En déduire que $\text{card}\big(\mathcal{P}_p\big) = \text{card}\big(\mathcal{P}_i\big)$.