DEVOIR SURVEILLE 1

Durée : 1h30

Epreuve sans document ni calculatrice. Les étapes des calculs doivent être détaillées et toutes les réponses justifiées. On veillera à donner les résultats sous forme simplifiée.

N'oubliez pas de préciser votre nom, votre section et votre groupe de TD sur les copies. Si vous rendez plusieurs copies, pensez à les numéroter.

Exercice 1 [5 points] : Raisonnement par récurrence.

1. Démontrer par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$2 \sum_{k=1}^n k = n(n+1) .$$

2. Calculer $1 + 2 + \dots + 100$.

Exercice 2 [6 points] : Un peu de logique. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application et P la propriété

$$\exists a \in \mathbb{R}, \forall x > a, \forall y \geq x, f(y) \geq f(x)$$

- a) Donner la négation de P .
b) Montrer que P est vraie pour $f(x) = x^2$.

Exercice 3 [9 points] : Applications et opérations sur les ensembles. Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

- a) Montrer que pour toutes parties C et D de F on a :

i) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$,
ii) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

- b) Soient A, B et C des parties de E :

i) Montrer que $B = (A \cup B) \cap B$.

ii) Montrer $B = C$ est équivalent à
$$\begin{cases} A \cup B = A \cup C , \\ \text{et} \\ A \cap B = A \cap C . \end{cases}$$

- c) Montrer que pour toutes parties A, B et C de F on a :

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(C) \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A \cup C) \\ \text{et} \\ f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A \cap C) \end{cases}$$

- d) Donner un exemple d'application $f : E \rightarrow F$ et de deux parties B et C de F telle que $f^{-1}(B) = f^{-1}(C)$ et $B \neq C$.

Exercice 4 [Hors barème] : Un peu de logique. Un pays est habité par des gens qui soit ne disent que la vérité, soit mentent systématiquement. Un touriste arrive à une intersection à deux branches dont l'une mène à la capitale et l'autre non. Il n'y a pas de panneau de signalisation mais un habitant, H , qui attend à l'intersection.

Le but de cet exercice est de trouver quelle question, ayant pour réponse oui ou non, doit poser le touriste pour savoir quelle route choisir.

Noter A pour " H dit toujours la vérité" et B pour "la route de gauche mène à la capitale". On note R la réponse de l'habitant H à la question "est-ce que $A \Leftrightarrow B$?" (la réponse est "oui" ou "non").

a) Compléter la table de vérité de

A	B	$A \Leftrightarrow B$	R
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

b) Quelle question, ayant pour réponse oui ou non, doit poser le touriste pour savoir quelle route il doit choisir.

Indication : Trouver une question telle que la réponse de l'habitant soit "oui" si et seulement si B est vraie.