Note : *Aucun document ni calculatrice n'est autorisé. Chaque réponse doit être clairement justifiée en indiquant le résultat du cours utilisé. La rédaction doit être soignée.*

Exercice 1 (6 points)

1. En utilisant l'inégalité $x - x^2 \leq \log(1+x) \leq x$, valable pour $x \geq -1/2$, et qu'on ne demande pas de démontrer, calculez les limites des suites suivantes

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Exercice 2 (6 points)

Déterminez la nature des suites suivantes et calculez leurs limites lorsqu'elles existent :

$$u_n := \frac{n^2 - 5n + 4}{n^2 + 2n + 6}, \quad v_n := \frac{n^2 + (-1)^n n + 2}{n + 1}, \quad w_n := \frac{n^2 + (-1)^n n + 2}{n^3 + 1},$$
$$x_n := \frac{(-1)^n n^2 + n + 2}{n^2 + 1}, \quad y_n := \frac{(-1)^n n^2 + 2}{n^3 + 1}.$$

Exercice 3 (8 points)

On définit par récurrence la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par son premier terme $u_0 \in \mathbf{R}$ et la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = 3u_n - 4, \quad n \in \mathbf{N}$$

1. On suppose que $u_0 > 2$. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n > 2$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n < u_{n+1}$.
2. On suppose que $u_0 < 2$. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n < 2$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} < u_n$.
3. Déterminer la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ en fonction des valeurs de u_0 . Pour quelle valeur de u_0 la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge-t-elle ?
4. On pose $a_n := u_n - 2$ pour $n \geq 0$.
 - 4.1. Quelle relation de récurrence vérifie la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$? En déduire une expression de a_n en fonction de n et de u_0 .
 - 4.2. On pose $v_n := u_n/3^n$ pour $n \in \mathbf{N}$. Démontrez que $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge et calculez sa limite.