BARRAUD Jean-François.

Laboratoire P. Painlevé, U.M.R. CNRS 8524
U.F.R. de Mathématiques
59 655 Villeneuve d'Ascq Cedex
Tél : +33 (0)3 20 43 42 12 - Fax : +33 (0)3 20 43 43 02
barraud@math.univ-lille1.fr

CURSUS UNIVERSITAIRE

Décembre 2007 : Habilitation à diriger des recherches, à l'Université Lille 1:
Quelques contributions en topologie symplectique et géométrie presque complexe.
Jury: P. Biran (TelAviv, rapporteur), S. Ivachkovich (Lille), F. Laudenbach (Nantes, rapporteur), M. Schwarz (Leipzig, rapporteur), J.-C. Sikorav (ENS Lyon), A. Sukhov (Lille, directeur), C. Viterbo (Ec. Polytechnique).

2000–2007 : Maître de Conférences à l'Université Lille 1.

1995–1999 : Doctorat, Université Toulouse 3, sous la direction de J.-C. Sikorav:
Courbes pseudoholomorphes équi-singulières en dimension 4.

1990–1995: ENS Cachan, Agrégation.

ACTIVITÉS SCIENTIFIQUES

Publications :

1. *Lagrangian intersections and the Serre spectral sequence* avec O. Cornea, "Annals of Mathematics", 166 (2007), 657-722.
2. *Quantization of the Serre spectral sequence* avec O. Cornea, 2006. à paraître dans "Journal of Symplectic Geometry" (∼32 p.) .
3. *Homotopical dynamics in Symplectic Topology* avec O. Cornea. Morse theoretical Methods in Non-Linear Analysis and Symplectic Topology, Springer (2006) 109-148.
4. *Lie brackets and singular type of real hypersurfaces* avec E. Mazzilli, à paraître, Mathematische Zeitshrift.
5. *Regular type of real hyper-surfaces in (almost) complex manifolds* avec E. Mazzilli. Mathematische Zeitshrift, 248 (2004), no. 4, 757–772.
6. *Courbes pseudo-holomorphes équisingulières en dimension 4*. Bull. Soc. Math. France 128 (2000), 179–206.
7. *Nodal symplectic spheres in $\mathbb{CP}^2$ with positive self-intersection*. Internat. Math. Res. Notices (1999), no. 9, 495–508.
8. *Sphères symplectiques à points doubles ordinaires positifs et courbes algébriques dans $\mathbb{CP}^2$*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 327 (1998), no. 7, 661–664.

Travaux en cours...

1. Avec E. Mazzilli, *Point of infinite type on real analytic hypersurfaces in 6 dimensional almost complex manifolds.*
2. *The path loop fibration in Novikov theory.*
3. *"Higher dimensional" Seidel morphisms.*

Communications :

Conférences internationales marquantes :

- Invitation au second **Congrès Canada-France**, Juin 2008.
- **Princeton** (IAS) lors d'un workshop d'une semaine en topologie symplectique (Octobre 2005)
- **Nantes**, Conférence organisée en l'honneur de F. Laudenbach.

`Séminaires/Colloques` :

- Montreal (UDM), Leipzig, Bruxelles, Polytechnique, ENS Lyon, Strasbourg, Nantes...

`Organisation de conférences` :

`Fév.` 2007 **:** Lancement d'un **cycle de conférences internationales** "Workshop on Symplectic Geometry, Contact Geometry and Interactions" (3 jours, géométrie symplectique et de contact, programme disponible sur http://math.univ-lille1.fr/ symplec/)
Mon but était de renforcer les liens de l'Université de Lille avec ses voisins dans le domaine symplectique : j'ai contacté F. Bourgeois de Bruxelles, C. Viterbo de l'École polytechnique, et A. Oancea de Strasbourg, et nous avons organisé la première édition de ce "Workshop" à l'échelle européenne, que nous espérons désormais annuel; la seconde édition a eu lieu à Bruxelles, Janvier/Février 2008.

`Mai 2002` **:** conférence internationale, co-organisée avec O. Cornea. (comprenant, entre autres orateurs : P. Biran, E. Giroux, H. Hofer, L. Polterovich...)

`Projet de recherche` : Voir ci-dessous.

Enseignement/Vie universitaire

`Responsabilités pédagogiques` :

- **Président de jury** et directeur des études en Licence MASS 1$^{\text{ère}}$ année, depuis Septembre 2004.
- **Commissaire de validation** (i.e. validations de diplômes étrangers ou obtenus dans d'autres formations).
- Accueil/Orientation des étudiants (journées portes ouvertes, orientation active...). Diverses présentations de la filière MASS, notamment aux professeurs principaux des lycées de l'académie.
- Mise en place d'une unité test dans l'esprit des "laboratoires de mathématiques" de J.-P. Kahane.
- Participation à la licence de mathématiques à distance (L3).

`Commissions/Conseils` : **Commissions de spécialistes** (Lille et Marseille 2003-2006, Lens 2001-2004), **Conseil d'UFR** (2003-2007).

`Vulgarisation` : **Conférences de vulgarisation** à destination de lycéens et de collégiens. Déplacements en lycées, fête des mathématiques, etc... (contact: `caterina.calgaro@math.univ-lille1.fr`)

`Autre/Divers` : contribution au logiciel libre de dessin vectoriel "Inkscape" et au développement de la librairie graphique "lib2geom" (géométrie des courbes planes).

Activité et Projet de recherche

J'ai concentré mon activité de recherche de ces dernières années autour de deux grandes directions. La première, en collaboration avec O. Cornea, a trait à la topologie et à la géométrie symplectique. La seconde, en collaboration avec E. Mazzilli, est plus proche de l'analyse complexe et concerne la géometrie des hypersurfaces réelles dans les variétés complexes ou presque complexes.

Théories de Morse et de Floer

Le premier travail de ma collaboration avec O. Cornea a consisté à enrichir la construction de l'homologie de Morse, de manière à prendre en compte tous les espaces de lignes de flot entre points critiques, quelques soient leurs dimensions, au lieu de se limiter aux espaces de dimension 0.

L'objet algébrique obtenu est un invariant bien connu, la suite spectrale de Leray-Serre associée à la fibration chemins-lacets $\Omega M \to \mathcal{P}M \to M$, qui est bien plus riche que l'homologie. En particulier, cet invariant décrit comment l'homologie de la variété et celle de son espace de lacets se combinent et s'annulent mutuellement pour n'obtenir à la fin de la suite que l'homologie du point.

Ce résultat a naturellement un analogue en topologie symplectique. Dans un premier temps nous avons travaillé sous des hypothèses topologiques assez fortes (annulation de la forme symplectique et de la première classe de Chern sur le π_2) garantissant l'absence de "bulles" holomorphes (ou de disques dans le cas relatif) dans la variété. La construction fournit alors un nouvel invariant, ayant exactement les mêmes propriétés d'invariance que l'homologie de Floer, mais qui est bien plus riche que celle-ci.

Si les restrictions topologiques évoquées sont fortes, elles peuvent toutefois être contournées dans une certaine mesure (au prix d'une limitation de la construction "à de petits niveaux d'énergie"), et nous avons pu en tirer des applications assez intéressantes et générales. La plus frappante est sans doute celle qui fournit une estimation géométrique de la distance de Hofer : la distance entre deux sous-variétés lagrangiennes (dans une classe d'isotopie hamiltonienne donnée) est le minimum d'énergie nécessaire pour réaliser une isotopie hamiltonienne de l'une sur l'autre. Montrer la non-dégénérescence de cette métrique est un résultat profond dû à Chekanov. Notre construction en redonne une preuve (sans hypothèse sur M) en fournissant en plus une estimation géométrique de cette non-dégénérescence : la distance de Hofer est essentiellement minorée par $\frac{\pi R^2}{2}$ où R est le rayon d'une "perle symplectique" enfilée sur L_1 sans toucher L_2 (c'est-à-dire d'une boule de $\mathbb{R}^{2n}$ $B_R \xrightarrow{\phi} M$ plongée dans M de telle sorte que $\phi(B_R \cap \mathbb{R}^n) \subset L_1$ et $\phi(B_R) \cap L_2 = \emptyset$).

Dans un deuxième temps, nous avons travaillé à étendre cette construction aux cas où les bulles holomorphes sont présentes. Leur impact est tout à fait intéressant : elles brisent la construction, dans la mesure où la différentielle δ du complexe sur lequel est construite la suite spectrale ne satisfait plus $\delta^2 = 0$. Cependant, δ^2 s'annule tout de même assez pour qu'on puisse définir les premières pages de la suite spectrale. L'invariant obtenu est donc une suite spectrale tronquée. Par soucis de simplicité, nous avons travaillé dans le cas absolu et dans une variété monotone (forme symplectique et première classe de Chern positivement proportionnelles), et le nombre de pages (et différentielles) invariantes est alors donné par le nombre $c_{1,\min}$, générateur positif de l'image de la première classe de Chern sur $\pi_2(M)$.

Un point remarquable de cette suite "tronquée" est qu'on peut l'interpréter comme une déformation quantique de la suite classique : on sait qu'en présence de bulles holomorphes, la cohomologie de Floer reste isomorphe à la cohomologie standard, mais que la structure produit se trouve perturbée en un "cup produit quantique". Ici, c'est la suite spectrale elle-même qui est affectée. Plus explicitement, la page E^2 de cette suite est la même que dans le cas classique, mais sa différentielle d^2 se décompose en $d^2 = d_0^2 + d_Q^2$, où d_0^2 est la différentielle 'classique' de la suite spectrale de Leray-Serre, et d_Q^2 est une perturbation 'quantique' qu'on peut expliciter à l'aide des invariants de Gromov-Witten binaires de la variété.

Cette construction a mis en évidence plusieurs points remarquables. Le premier est l'existence de relations non triviales entre les invariants de Gromov-Witten binaires et certains invariants de Ganea-Hopf de la variété. Une autre observation intéressante est que la suite permet de détecter une certaine monodromie des bulles holomorphes: l'arrêt "prématuré" de la suite détecte en effet l'existence d'une famille de tubes de Floer ayant une bulle attachée, tel que le point d'attachement de la bulle tourne autour du tube. Enfin, la suite "quantique" peut être utilisée dans certaines situations pour exhiber des orbites non triviales d'hamiltoniens autonomes. En particulier, nous l'avons utilisée pour re-montrer la conjecture de Weinstein dans $\mathbb{CP}^n$, donnant ainsi une version algébrique de la preuve de H. Hofer et C. Viterbo.

Perspectives Les travaux de fondation de ce nouvel invariant sont donc maintenant bien avancés (même si, par souci d'efficacité et de simplicité, nous avons systématiquement travaillé dans le cadre le plus simple mettant à jour les phénomènes voulus), et il peut être mis à profit dans un certain nombre de directions en cours d'exploration.

1-Théorie de Novikov et lagrangiennes exactes dans les cotangents Tout d'abord, les applications en théorie de Morse méritent d'être poussées plus avant, et l'un des cadres naturels dans lequel j'aimerais exploiter cette suite spectrale est celui de l'homologie de Novikov (ce qui constitue une motivation supplémentaire pour traiter explicitement le cas non simplement connexe, laissé de côté jusqu'ici pour des raisons techniques).

La construction est déjà bien avancée; ce qui reste à faire est principalement de comprendre géométriquement la suite, en particulier sa limite, pour pouvoir en tirer des applications. J'espère notamment obtenir un éclairage nouveau sur les travaux de Latour en ce qui concerne les chemins "allant à l'infini", ainsi que des résultats d'existence d'orbites bornées. J'ai commencé à nouer une collaboration avec M. Damian de Strasbourg autour de ce projet, que j'espère voir se développer.

Cette direction n'abandonne pas pour autant la géométrie symplectique: une conjecture encore très largement ouverte aujourd'hui affirme que les seules sous-variétés exactes dans les cotangents sont des déformations hamiltoniennes de la section nulle. En reliant homologies de Novikov et de FLoer, M. Damian a récemment obtenu des restrictions assez frappantes dans certains cas particuliers. Il est raisonnable d'attendre que cette nouvelle construction permette d'affiner ces résultats et offre de nouvelles prises sur la conjecture...

2- Morphismes de Seidel généralisés et $\pi_1(\mathrm{Ham}(M,\omega))$. Pour ce qui est de la géométrie symplectique, nous avons laissé de côté un certain nombre de pistes au cours de notre travail pour nous concentrer sur la construction elle-même. Ainsi par exemple le morphisme de Seidel associé à un lacet d'isotopies hamiltoniennes apparaît-il naturellement comme une composante d'une des différentielles de la suite spectrale. Cet (auto)morphisme de l'homologie de Floer est obtenu à partir d'espaces courbes holomorphes particuliers de dimension 0, et est célèbre pour avoir fourni des résultats très spectaculaires de rigidité des isotopies hamiltoniennes.

En utilisant des espaces de courbes de dimensions supérieures, on obtient un morphisme défini sur la suite spectrale. Il faut bien sûr en étudier les propriétés d'invariance et de multiplicativité. La très élégante technique développée par F. Lalonde, D. McDuff et L. Polterovich s'adapte a priori très bien à cette nouvelle situation. Il semble raisonnable d'attendre que l'exploitation de cet invariant algébrique fournisse de nouveaux résultats 'géométriques', notamment sur le groupe fondamental des isotopies hamiltoniennes.

A plus long terme, ce nouvel invariant ouvre de nombreuses directions à explorer. Tout d'abord dans le sens de l'étayage de la construction en considérant notamment la compatibilité avec le cup produit et le cup produit quantique, ou le remplacement de l'espace des lacets par un espace convenable pour obtenir une suite spectrale non tronquée malgré les bulles. Plus profondément, le fait géométrique fondamental sur lequel repose la construction est la description du bord d'un espace de modules comme produit d'espaces de modules plus petits. Or ce type de relations entre espaces de modules se retrouve dans toutes les versions de la théorie de Floer, notamment l'homologie de contact et la théorie symplectique des champs, qui jouent un rôle croissant, dépassant même le cadre de la géométrie symplectique puisque ces théories interviennent maintenant de façon cruciale en théorie des nœuds et topologie de petite dimension. Ces généralisations de la théorie de Floer m'intéressent bien sûr beaucoup, et il me semble important de déterminer quelles extensions de notre construction sont possibles dans ce cadre.

Enfin, dans la direction des applications, on peut raisonnablement espérer obtenir des raffinements de résultats connus en topologie symplectique puisque la suite spectrale est un bon outil pour exhiber (de nombreuses) courbes holomorphes, ce qui est un point crucial dans un grand nombre de constructions basées sur l'homologie de Floer. On peut par exemple espérer obtenir des raffinements du célèbre résultat de M. Gromov montrant qu'il n'existe pas de sous-variétés Lagrangiennes compactes de $\mathbb{R}^{2n}$ simplement connexes, en donnant des contraintes sur "la taille" minimale du π_1...

Géométrie des hypersurfaces réelles

En collaboration avec E. Mazzilli, je m'intéresse également à la géométrie des hypersurfaces réelles dans les variétés complexes ou presque complexes, et plus particulièrement à la notion de type, c'est-à-dire à l'ordre de contact maximal que l'hypersurface peut avoir avec un germe de disque holomorphe en un point donné.

On distingue le type régulier du type singulier suivant qu'on exige que les germes de disques soient immergés ou non. La notion de type joue un rôle important en analyse complexe, en particulier dans le contrôle de la résolution de $\bar{\partial}$.

Notre premier travail a consisté à caractériser le type régulier à l'aide de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs "complexes" tangents à l'hypersurface: nous montrons que le type régulier est aussi l'ordre de stabilité maximal des fibrés en droites complexes tangentes à l'hypersurface.

Ce résultat constitue une réponse à une question de T. Bloom et I. Graham de 1977 et est une généralisation très naturelle d'un résultat de J. Kohn (1972) en dimension 2, correctement interprété. Il est à noter ici que le choix du point de vue presque complexe sur la question, au delà d'établir des résultats dans ce nouveau cadre, s'avère très utile même pour traiter le cas "intégrable".

Nous avons ensuite étendu ces résultat au cas du type singulier, et nous nous intéressons maintenant à différents aspects de la dépendance du type par rapport au point considéré.

1- Inégalité de D'Angelo. De façon sans doute un peu surprenante pour l'intuition, le type n'est pas semi-continu supérieurement. Dans le cas intégrable toutefois, le type singulier satisfait une inégalité, due à J.-P. D'Angelo, qui contrôle la chute que peut subir le type par passage à la limite.

L'un des thèmes que j'aimerais développer dans cette direction est l'étude de cette inégalité "du point de vue presque complexe": même dans le cas intégrable, cela permettrait d'offrir une compréhension géométrique de l'inégalité, et d'avoir une description plus fine des phénomènes mis en jeu lors du passage à la limite. C'est une question plus difficile qu'il n'y paraît. Nous y avons déjà suffisamment travaillé pour conjecturer une interprétation géométrique de l'inégalité, mais la part technique de la question reste à affronter.

2- Hypersurfaces compactes de $\mathbb{R}^{2n}$. Une situation clef pour l'étude du type et de sa dépendance vis-à-vis du point base est celle des hypersurfaces réelles analytiques et des points de type infini. Même les questions les plus naturelles qu'on puisse se poser dans ce cadre n'ont pas de réponse évidente: en un point de type infini, y a-t-il un germe de disque holomorphe contenu dans l'hypersurface? Si l'hypersurface contient un tel germe, contient-elle un espace complexe global? Une question naturelle qui met en jeu les divers aspects de ce problème est celle des hypersurfaces réelles analytiques compactes de $\mathbb{R}^{2n}$: on sait que dans le cas intégrable, elles sont toutes de type fini, mais on n'a pas de preuve "purement géométrique", et la question reste ouverte dans le cas général. Nous avons quelques résultats partiels en petite dimension, qui demandent à être généralisés en dimension plus grande. Par ailleurs, par le biais de cette question apparaissant aussi des questions relevant de la théorie des courbes pseudo-holomorphes dans la catégorie analytique, qui me semble mériter d'être développée davantage qu'elle ne l'est aujourd'hui.

A plus long terme, de nombreuses questions restent ouvertes sur la description précise de la géométrie du bord de domaines dans une variété presque complexe (singularités des germes de courbes pour le type singulier, suivi des germes par passage à la limite, type infini et courbes contenues dans l'hypersurface...). Si ces questions me semblent intrinsèquement intéressantes, même dans le cas intégrable, le développement croissant de l'analyse presque complexe (les résultats récents de S. Ivaschkovitch et A. Sukhov sur le principe de réflexion, ou de K. Diederich et A. Sukhov sur les domaines pseudo-convexes) me semble intéressant et peut s'avérer très utile pour la géométrie symplectique elle même (via la notion de pseudo-convexité qui joue un rôle essentiel, ou le principe de réflexion).

Enfin, à ces directions de recherches s'ajoutent bien sûr toutes celles qui pourront naître de futures rencontres et interactions au sein d'une nouvelle équipe!

À Lille.
Jean-François Barraud.