

Chapitre 8

Le Mouvement Brownien

Ce chapitre est consacré à une présentation élémentaire du mouvement brownien. Nous avons introduit dans le chapitre précédent le processus de Poisson, dont nous avons vu que c'est un processus à accroissements indépendants homogènes sur \mathbb{N} . Le mouvement brownien est lui un processus à accroissements indépendants homogènes sur \mathbb{R} . Mais c'est de plus un processus dont les trajectoires sont continues. De la même manière que le processus de Poisson est l'outil élémentaire pour construire les processus de Markov à temps continu sur un ensemble fini ou dénombrable, le mouvement brownien est la brique fondamentale pour construire les processus de Markov continus (sur \mathbb{R} ou \mathbb{R}^n), qu'on appelle les diffusions. Mais nous n'allons pas parler de cet aspect ici, car cela nous entraînerait trop loin. Nous montrerons cependant (au paragraphe 5) qu'il permet de construire les processus gaussiens stationnaires.

1 Le mouvement brownien : construction

Dans tout ce chapitre, nous appellerons processus une famille de variables aléatoires réelles $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$. On dit qu'un tel processus est gaussien si, pour tout n -uplet (t_1, \dots, t_n) de points de \mathbb{R}_+ , le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.

Dans ce cas, la loi de tous les vecteurs $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est entièrement caractérisée par la donnée de deux fonctions $e(t) = \mathbf{E}(X_t)$ et $K(s, t) = \mathbf{E}(X_s X_t) - e(s)e(t)$.

On dit que le processus est centré si $e(t) = 0$. On peut toujours se ramener

au cas centré en considérant le nouveau processus $X_t - e(t)$. C'est pourquoi dans la suite nous ne nous intéresserons qu'aux processus gaussiens centrés.

Un processus est dit à accroissements indépendants si, pour tout n -uplet $(0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n)$, les variables

$$X_0, X_{t_1} - X_0, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes.

Quitte à changer X_t en $X_t - X_0$, on pourra toujours se ramener au cas où $X_0 = 0$.

Remarquons que si nous savons que le processus est gaussien et nul en 0, alors la propriété d'accroissements indépendants revient à dire que, pour tout quadruplet $0 \leq s_1 < s_2 \leq t_1 < t_2$, les variables $X_{s_2} - X_{s_1}$ et $X_{t_2} - X_{t_1}$ sont indépendantes (puisque dans un vecteur gaussien centré, l'indépendance est équivalente à l'orthogonalité).

Considérons un processus gaussien à accroissements indépendants centré et nul en 0. Appelons $F(t) = K(t, t) = \mathbf{E}(X_t^2)$.

Observons tout d'abord que F est croissante, puisque, si $s < t$, $X_s = X_s - 0$ et $X_t - X_s$ sont indépendantes, et donc

$$\mathbf{E}(X_t^2) = \mathbf{E}(X_s + X_t - X_s)^2 = \mathbf{E}(X_s^2) + \mathbf{E}(X_t - X_s)^2 \geq \mathbf{E}(X_s^2).$$

Si, pour $s < t$, on a $F(s) = F(t)$, alors le calcul précédent nous montre que $\mathbf{E}(X_t - X_s)^2 = 0$, et donc que $X_t = X_s$. Le processus est donc constant (presque sûrement) sur les intervalles de constance de $F(t)$. Quitte à reparamétriser le temps, et à supprimer les intervalles où X est constant, on pourra supposer que F est strictement croissante.

Enfin, si nous écrivons pour $s < t$

$$\mathbf{E}(X_s X_t) = \mathbf{E}(X_s^2) + \mathbf{E}(X_s(X_t - X_s)) = \mathbf{E}(X_s^2),$$

nous voyons que $K(s, t) = F(s)$, et donc en général on a

$$K(s, t) = \min(F(s), F(t)) = F(s) \wedge F(t) = F(s \wedge t).$$

Réciproquement, considérons un processus gaussien centré nul en 0 dont la covariance vaut $K(s, t) = K(s, s) \wedge K(t, t)$. Alors, c'est un processus à accroissements indépendants. En effet, pour $s_1 < s_2 \leq t_1 < t_2$, on a

$$\mathbf{E}(X_{s_2} - X_{s_1})(X_{t_2} - X_{t_1}) = K(s_1, s_1) - K(s_2, s_2) - K(s_1, s_1) + K(s_2, s_2) = 0.$$

On voit donc que cette forme particulière de la covariance est, pour les processus gaussiens, caractéristique des processus à accroissements indépendants.

Appelons G la fonction inverse de F (lorsque F est strictement croissante), et considérons le processus $Y_t = X_{G(t)}$. Y est un processus gaussien centré à accroissements indépendants de covariance

$$K(s, t) = s \wedge t.$$

Ceci explique le rôle central joué par le cas particulier où $F(t) = t$.

Définition 1.1. *On dit qu'un processus $B_t(\omega)$ défini sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) est un mouvement brownien nul en 0 si c'est un processus gaussien centré de noyau de covariance $K(s, t) = s \wedge t$, et qu'il est continu : pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto B_t(\omega)$ est une fonction continue.*

Sans même parler de la continuité, ce n'est pas évident a priori qu'un tel processus existe. Il y a une condition sur le noyau $K(s, t)$ pour qu'il existe un processus gaussien centré de covariance $K(s, t)$ (voir la section 5 plus bas).

Par ailleurs, en modifiant toutes les variables B_t sur un mme ensemble de probabilité nulle, on ne change pas la loi des n -uplets $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$. On voit donc qu'il suffit d'avoir la continuité des trajectoires $t \mapsto B_t(\omega)$ en dehors d'un ensemble de probabilité nulle pour construire un mouvement brownien. $B_t(\omega)$

Par ailleurs, le noyau de covariance permet de calculer la loi de tous les n -uplets $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$. Mais ceci ne permet pas de voir la continuité des trajectoires $t \mapsto B_t$.

Pour s'en convaincre, prenons un exemple simple. Considérons une variable gaussienne $N(0, 1)$ Y , et considérons le processus gaussien centré le plus simple $X_t = tY$, dont la covariance vaut $K(s, t) = st$. C'est clairement un processus continu.

Supposons pour fixer les idées que l'espace Ω est \mathbb{R} , muni de la mesure gaussienne standard, et que $Y(\omega) = \omega$. Pour tout t , modifions Y en $\hat{Y}_t = Y \mathbf{1}_{\omega \neq t}$, et posons $\hat{X}_t = t\hat{Y}_t$.

Bien sûr, pour tout t , \hat{X}_t est presque sûrement égal à X_t , et donc (\hat{X}_t) est un processus gaussien de même covariance. Par contre, sauf sur l'ensemble de mesure nulle $\{\omega = 0\}$, aucune des trajectoires $t \mapsto \hat{X}_t(\omega)$ n'est continue.

On ne voit donc pas sur la covariance elle-même que le processus est continu. Mais on peut lire dans la covariance la *possibilité* de trouver une réalisation à

trajectoires continues du processus. Nous n'allons pas entrer dans les détails ici, ce qui nous entraînerait trop loin, mais nous allons plutôt construire directement le processus avec des réalisations continues.

Le théorème fondamental de ce chapitre est le suivant :

Théorème 1.2. *Un mouvement brownien, ça existe !*

Démonstration. — Nous allons déjà construire le mouvement brownien pour $t \in [0, 1]$. Ensuite, on l'étendra pour $t \in \mathbb{R}_+$ en recollant des browniens indépendants sur les intervalles $[n, n + 1]$.

Tout d'abord, nous allons voir qu'il est assez facile de construire de plusieurs façons différentes un processus gaussien centré ayant la bonne covariance. Cela se fait à partir d'une base orthonormée de $L^2([0, 1])$ et d'une suite de variables aléatoires indépendantes. Ensuite, un choix judicieux de cette base nous permettra de construire le processus de façon qu'il aie des trajectoires continues.

Tout repose sur la remarque suivante, pour s et t dans $[0, 1]$

$$s \wedge t = \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,s]}(u) \mathbf{1}_{[0,t]}(u) du.$$

Soit alors (e_n) une base orthonormée de $L^2([0, 1], dx)$, et appelons

$$E_n(s) = \int_0^s e_n(u) du.$$

On a

$$\mathbf{1}_{[0,s]}(u) = \sum_n E_n(s) e_n(u),$$

puisque $E_n(s)$ est le produit scalaire de e_n et de $\mathbf{1}_{[0,s]}$ dans $L^2([0, 1])$.

De même, le produit scalaire de $\mathbf{1}_{[0,s]}$ et $\mathbf{1}_{[0,t]}$ est égal à

$$\sum_n E_n(s) E_n(t) = s \wedge t.$$

Considérons alors une suite Y_i de variables gaussiennes indépendantes $N(0, 1)$, et posons

$$B_s = \sum_n E_n(s) Y_n.$$

Puisque la série $\sum_n E_n^2(t)$ est convergente (sa somme vaut t), la série $\sum_n E_n(t) Y_n$ converge, dans $L^2(\Omega)$, vers une variable gaussienne.

De plus, on a, par indépendance des Y_i ,

$$\mathbf{E}(B_t B_s) = \sum_n E_n(s) E_n(t) = s \wedge t.$$

On a donc bien construit ainsi un processus ayant la bonne loi.

Il nous reste à montrer qu'en choisissant convenablement la base e_n , on peut obtenir une fonction $t \mapsto B_t$ continue. Pour cela, on va montrer que pour une bonne base, qu'on va décrire ci-dessous, la convergence a lieu non seulement dans L^2 , mais presque sûrement uniformément en $t \in [0, 1]$.

La base que nous choisissons est la base de Haar. Elle est indexée par deux indices $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq k \leq 2^{n-1} - 1$:

$$e_{k,n}(s) = 2^{\frac{n-1}{2}} (\mathbf{1}_{[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n}[} - \mathbf{1}_{[\frac{2k+1}{2^n}, \frac{2k+2}{2^n}[}),$$

à laquelle on adjoint la fonction constante $e_{0,0} = 1$.

Il est assez facile de voir que les fonctions $e_{k,n}$ sont deux à deux orthogonales. Le facteur $2^{\frac{n-1}{2}}$ est là pour en faire des fonctions de norme 1 dans $L^2([0, 1])$. On voit aussi aisément qu'avec des combinaisons linéaires de celles ci on peut obtenir toutes les fonctions indicatrices d'intervalles dyadiques $\mathbf{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}$. Puisqu'on peut approcher uniformément sur $[0, 1]$ les fonctions continues par des combinaisons linéaires d'indicatrices d'intervalles dyadiques, on voit que les combinaisons linéaires des fonctions $e_{k,n}$ sont denses dans les fonctions continues, et par suite dans $L^2([0, 1])$. C'est bien une base de $L^2([0, 1])$.

On obtient immédiatement l'encadrement pour les primitives

$$0 \leq E_{k,n}(s) \leq 2^{-\frac{n+1}{2}}.$$

C'est le fait que ces fonctions $E_{k,n}$ sont très petites qui nous intéresse dans cette base.

En effet, nous allons nous servir d'un lemme

Lemme 1.3. *Il existe une constante K telle que, si (X_1, \dots, X_p) sont des variables gaussiennes réelles $N(0, 1)$, alors*

$$\mathbf{E}(\max_{i=1}^p |X_i|) \leq K \sqrt{\log p}.$$

Démonstration. — (Du lemme 1.3) Appelons $\phi(x) = \exp(\frac{x^2}{4})$ et $K_1 = \mathbf{E}(\exp(\frac{X^2}{4})) = \mathbf{E}(\phi(|X_1|))$. La fonction ϕ est convexe, croissante sur \mathbb{R}_+ , et donc

$$\phi(\mathbf{E}(\max_i |X_i|)) \leq \mathbf{E}(\phi(\max_i |X_i|)) \leq p \mathbf{E}(\phi(|X_1|)) = p K_1.$$

On en déduit le lemme en prenant les logarithmes des deux membres. ■

Ecrivons alors la série

$$B_s = \sum_n \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} E_{k,n}(s) Y_{k,n},$$

où les variables $Y_{k,n}$ sont des variables gaussiennes $N(0, 1)$ indépendantes. Appelons

$$Z_n(s) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} E_{k,n}(s) Y_{k,n}.$$

Nous savons, que, pour tout s ,

$$\sum_n Z_n(s) = B(s),$$

où la convergence a lieu dans L^2 . Pour une fonction continue $f(s)$ définie sur $[0, 1]$, notons sa norme uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{s \in [0,1]} |f(s)|.$$

Dans la somme qui définit $Z_n(s)$, les fonctions $E_{k,n}(s)$ sont à support disjoints, et donc

$$\|Z_n\|_\infty = \max_{k=0}^{2^{n-1}-1} \|E_{k,n}\|_\infty |Y_{k,n}| \leq 2^{-\frac{n+1}{2}} \max_{k=0}^{2^{n-1}-1} |Y_{k,n}|,$$

. Alors, le lemme 1.3 nous dit donc que

$$\mathbf{E}(\|Z_n\|_\infty) \leq K \sqrt{\log 2^{n-1}} 2^{-\frac{n+1}{2}} = a_n.$$

La série $\sum_n a_n$ est convergente, et donc

$$\sum_n \mathbf{E}(\|Z_n\|_\infty) < \infty.$$

Lorsqu'une suite converge dans L^1 , il existe une sous-suite qui converge presque sûrement. Soit n_k une telle sous-suite, et un ω pour laquelle la série $\sum_{p=0}^{n_k} \|Z_p\|_\infty(\omega)$ est convergente.

Pour un tel ω , la série $\sum_{p=0}^{n_k} Z_p(s)(\omega)$ est uniformément convergente. Comme c'est une série de fonctions continues (car les fonctions $E_{k,n}(s)$ le sont), la limite est continue.

Appelons $\hat{B}_s(\omega)$ cette limite, qui est définie pour presque tout ω . \hat{B}_s est continue, et, pour tout $s \in [0, 1]$, \hat{B}_s est égale presque sûrement à B_s , puisque la série $\sum_n Z_n(s)$ converge dans L^2 vers B_s , et que \hat{B}_s est la limite de sommes $\sum_{p=0}^{n_k} Z_p(s)$.

On a ainsi montré que \hat{B}_s est un processus gaussien ayant la même covariance que B_s , et qui est de plus continu.

Il reste à prolonger cette construction à tout $t \in \mathbb{R}_+$. Pour cela, on construit de la même manière une suite (B_s^i) de mouvements browniens indépendants continus avec $s \in [0, 1]$. Pour $s \in [0, 1]$, on pose $B_s = B_s^1$, pour $s \in [1, 2]$, on pose $B_s = B_1^1 + B^2(s-1)$, et ainsi de suite. Si on a construit B_s pour $s \in [0, n]$, on pose sur $[n, n+1]$ $B_s = B_n + B_{s-n}^{n+1}$. C'est clairement un processus gaussien continu ayant la bonne covariance.

■

Remarques

1. Dans la démonstration que nous venons de faire, nous avons extrait une sous-suite qui converge presque sûrement uniformément vers $\hat{B}(s)$. En fait, une analyse plus précise de la suite a_n montre qu'on n'a pas besoin d'extraire de sous-suite, et que la série la série $\sum_n \|Z_n\|_\infty$ est presque sûrement convergente. Pour cela, nous appliquons le fait que, si une suite de variables positives U_n est telle que $\sum_n \mathbf{E}(U_n) < \infty$, la suite U_n converge presque sûrement vers 0, résultat qu'on applique au reste de la série $U_n = \sum_n^\infty \|Z_n\|_\infty$.

Plus précisément, on peut observer que

$$\sum_n \sum_{p=n}^\infty \mathbf{E}(\|Z_p(s)\|_\infty) < \infty.$$

On en déduit que

$$\sum_{p=n}^\infty \|Z_p(s)\|_\infty$$

converge presque sûrement vers 0, et donc que la série $\sum_n Z_n(s)(\omega)$ converge presque sûrement uniformément vers une fonction continue $\hat{B}_s(\omega)$. Mais puisque cette série converge dans $L^2(\Omega)$ vers B_s , \hat{B}_s est un processus

gaussien centré de covariance $K(s, t) = s \wedge t$. C'est donc bien le processus cherché (pour $t \in [0, 1]$).

2. La démonstration du lemme 1.3 peut sembler spécifique au cas des variables gaussiennes. Mais en général, pour une famille (X_1, \dots, X_n) de variables aléatoires positives intégrables et de même loi, on obtient une majoration du mme type en considérant uniquement la queue de la loi commune des X_i . Si l'on pose $X_n^* = \max_{i=1}^n X_i$, on obtient une estimation de $\mathbf{E}(X_n^*)$ en posant

$$\mathbf{E}(X_n^*) = \int_0^\infty \Pr(X_n^* \geq t) dt,$$

et on majore

$$\Pr(X_n^* \geq t) \leq n \Pr(X_1 \geq t) \wedge 1.$$

En coupant l'intégrale au point t_n tel que $\Pr(X \geq t) = \frac{1}{n}$, on obtient la majoration

$$\mathbf{E}(X_n^*) \leq t_n + n\mathbf{E}((X - t_n)_+) \leq t_n + n\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{X \geq t_n}).$$

Ici, lorsque X est le module d'une gaussienne $N(0, 1)$, on

$$\Pr(X \geq t) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \leq C \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right),$$

et

$$\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{X \geq t}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

En choisissant $t_n = \sqrt{2 \log n}$, on obtient pour les variables gaussiennes le résultat annoncé.

3. Remarquons que

$$\lim_{s \rightarrow t} \mathbf{E} \frac{(B_s - B_t)^2}{|s - t|} = 1,$$

ce qui suggère que $B_s - B_t$ est de l'ordre de $\sqrt{s - t}$ lorsque s est proche de t . En fait, on peut montrer que c'est "presque" le cas, et en particulier que la courbe $t \mapsto B_t(\omega)$ n'est dérivable en aucun point t , et ceci pour presque tout ω .

2 Le mouvement brownien comme martingale

Nous n'allons pas développer dans ce chapitre toute la théorie des martingales à temps continu, qui est la parallèle de la théorie des martingales à temps discret développée dans le chapitre 3. Mais une des propriétés fondamentales du mouvement brownien est que c'est une martingale continue à temps continu. De plus, toute martingale continue à temps continu est, à un changement aléatoire de temps près, un mouvement brownien.

Dans cette section, nous considérons un mouvement brownien (B_t) défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ et nous considérons la famille croissante de sous-tribus (une filtration)

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_u, u \leq t).$$

Remarque. — La tribu \mathcal{F}_t est engendrée par les valeurs de B_s aux instants rationnels :

$$\mathcal{F}_t = \sigma(B_u, u \leq t, u \in \mathbb{Q}).$$

En effet, puisque $t \mapsto B_t$ est continue, on a $B_u = \lim_{v \rightarrow u, v \in \mathbb{Q}} B_v$, et donc la connaissance de la restriction de la famille (B_u) aux instants u rationnels est suffisante pour en avoir la connaissance à tous les instants.

La propriété fondamentale de cette filtration est la

Proposition 2.1. *Pour tout $0 \leq s < t$, $B_t - B_s$ est indépendante de \mathcal{F}_s .*

Démonstration. — En effet, $B_t - B_s$ est indépendante du $(n+1)$ -uplet $(B_{s_1}, \dots, B_{s_n}, B_s)$ pour tout choix $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq s$. Soit alors (t_n) une suite qui énumère les points rationnels de $[0, s]$, et considérons la famille croissante de sous-tribus $\mathcal{G}_n = \sigma(B_{t_i}, i \leq n)$. La variable $B_t - B_s$ est indépendante de \mathcal{G}_n , donc de la tribu $\vee_n \mathcal{G}_n$. La remarque précédente montre que $\vee_n \mathcal{G}_n = \mathcal{F}_s$ et permet de conclure. ■

Nous pouvons maintenant décrire la propriété de martingale du mouvement brownien.

Définition 2.2. *Nous dirons qu'une famille de variables aléatoires $(X_t, t \geq 0)$ est une martingale (par rapport à \mathcal{F}_t), si*

1. *Pour tout $t \geq 0$, X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.*

2. Pour tout $t \geq 0$, $\mathbf{E}(|X_t|) < \infty$.
3. Pour tout couple de réels $0 \leq s \leq t$,

$$\mathbf{E}(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s.$$

Nous avons alors

Proposition 2.3. *Avec la définition précédente*

1. B_t est une martingale
2. $B_t^2 - t$ est une martingale
3. Pour tout réel α , $\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t)$ est une martingale.

Démonstration. — La démonstration est presque immédiate. Pour le point 1, on écrit, pour $s < t$, $B_t = B_s + B_t - B_s$, et on remarque que $B_t - B_s$ est centrée indépendante de \mathcal{F}_s , donc $\mathbf{E}(B_t - B_s/\mathcal{F}_s) = 0$.

Pour le point 2, on écrit

$$B_t^2 = B_s^2 + 2B_s(B_t - B_s) + (B_t - B_s)^2.$$

On a

$$\mathbf{E}(B_s(B_t - B_s)/\mathcal{F}_s) = B_s \mathbf{E}(B_t - B_s/\mathcal{F}_s) = 0,$$

et

$$\mathbf{E}((B_t - B_s)^2/\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(B_t - B_s)^2 = t - s,$$

d'où

$$\mathbf{E}(B_t^2/\mathcal{F}_s) = B_s^2 + t - s,$$

ce qui revient à dire que $B_t^2 - t$ est une martingale.

Enfin, pour le point 3, on écrit

$$\exp(\alpha B_t) = \exp(\alpha B_s) \exp(\alpha(B_t - B_s)),$$

d'où

$$\mathbf{E}(\exp(\alpha B_t)/\mathcal{F}_s) = \exp(\alpha B_s) \mathbf{E}(\exp(\alpha(B_t - B_s))) = \exp(\alpha B_s) \exp\left(\frac{\alpha^2}{2}(t - s)\right),$$

le dernier point venant de ce que si X est une gaussienne centrée de variance σ^2 , alors

$$\mathbf{E}(\exp(\alpha X)) = \exp\left(\frac{\alpha^2 \sigma^2}{2}\right).$$

On a donc

$$\mathbf{E}(\exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t)/\mathcal{F}_s) = \exp(\alpha B_s - \frac{\alpha^2}{2}s).$$

■

On a une réciproque presque immédiate du dernier point 3.

Théorème 2.4. *Considérons une famille croissante de sous tribus \mathcal{F}_t et un processus continu X_t nul en 0 tel que, pour tout réel α , le processus $\exp(\alpha X_t - \frac{\alpha^2}{2}t)$ soit une martingale.*

Alors, X_t est un mouvement brownien.

Démonstration. — On remarque que l’hypothèse s’écrit, pour tout $s < t$

$$\mathbf{E}(\exp(\alpha(X_t - X_s))/\mathcal{F}_s) = \exp(\frac{\alpha^2}{2}(t - s)).$$

Dans ce cas, par prolongement analytique, nous savons que

$$(2.1) \quad \mathbf{E}(\exp(i\alpha(X_t - X_s))/\mathcal{F}_s) = \exp(-\frac{\alpha^2}{2}(t - s)) = \mathbf{E}(\exp(i\alpha(X_t - X_s))).$$

Pour tout $3n$ -uplet (α, c, s) de réels $(\alpha_1, c_1, s_1, \dots, \alpha_n, c_n, s_n)$, considérons la fonction bornée

$$f_{\alpha,c,s}(x) = \sum_i c_i \cos(\alpha_i x) + s_i \sin(\alpha_i x).$$

La famille \mathcal{C} de telles fonctions est stable par multiplication. La plus petite tribu qui rend mesurable toutes les fonctions de \mathcal{C} est la tribu borélienne, puisque $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} = x$.

En prenant les parties réelles et imaginaires dans l’équation 2.1, nous voyons que, pour toutes les fonctions f de \mathcal{C} , nous avons

$$\mathbf{E}(f(X_t - X_s)/\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(f(X_t - X_s)).$$

Par le théorème des classes monotones, cela s’étend donc à toutes les fonctions boréliennes bornées f , et ceci montre l’indépendance de la variable $X_t - X_s$ et de la tribu \mathcal{F}_s .

On en déduit aisément par récurrence que, pour $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n$, les variables $(X_{s_1}, X_{s_2} - X_{s_1}, \dots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}})$ sont indépendantes.

Par ailleurs, la formule

$$\mathbf{E}(\exp(i\alpha(X_t - X_s))) = \exp(-\frac{\alpha^2}{2}(t - s))$$

montre que la variable $X_t - X_s$ est gaussienne de covariance $t - s$. Ceci suffit à conclure. ■

Remarques

1. Dans la démonstration précédente, nous avons changé α en $i\alpha$ pour nous ramener à utiliser le théorème des classes monotones avec des fonctions bornées.
2. En faisant le développement limité en $\alpha = 0$

$$\exp(\alpha X_t - \frac{\alpha^2}{2}t) = 1 + \alpha X_t + \frac{\alpha^2}{2}(X_t^2 - t) + o(\alpha^2),$$

nous voyons que les propriétés 1 et 2 de la proposition 2.3 se déduisent de la propriété 3.

3. En fait, il suffit de savoir que le processus continu X_t est une martingale et que $X_t^2 - t$ est une martingale pour savoir que X_t est un mouvement brownien. Mais ceci est beaucoup plus difficile et requiert quelques connaissances en calcul stochastique qui dépassent le cadre de ce court chapitre.

Enfin, nous remarquons que de nombreux théorèmes qui s'appliquent aux martingales à temps discret s'appliquent directement aux martingales à temps continu. En effet, si (t_n) est une suite croissante de réels, et que (M_t) est une martingale, alors la suite $N_n = M_{t_n}$ est une martingale pour la suite de tribus $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{t_n}$. A titre d'exemple d'application de cette remarque, donnons le

Théorème 2.5. (*Inégalité de Doob*) Soit M_t une martingale, et posons $M_t^* = \sup_{s \in \mathbb{Q}, s \leq t} |M_s|$. Alors, pour $\lambda > 0$,

$$\lambda \mathbf{P}(M_t^* > \lambda) \leq \mathbf{E}(|M_t|).$$

Démonstration. — Soit (t_n) une énumération des rationnels antérieurs à t . Pour montrer l'inégalité, il suffit de montrer que pour tout n , la variable $Y_n = \max_{i=1}^n |M_{t_i}|$ vérifie

$$\lambda \mathbf{P}(Y_n > \lambda) \leq \mathbf{E}(|M_t|).$$

Rangeons alors les points t_1, \dots, t_n en une suite croissante

$$0 \leq s_1 < \dots < s_n \leq t.$$

La suite $(M_0, M_{s_1}, \dots, M_{s_n}, M_t)$ est une martingale et on peut lui appliquer l'inégalité de Doob (théorème 7.1 du chapitre 3). ■

3 Le mouvement brownien comme processus de Markov

Sachant que le mouvement brownien est à accroissements indépendants, il est facile de calculer la loi conditionnelle de B_t sachant \mathcal{F}_s , pour $s < t$. Nous avons le

Théorème 3.1. *Pour toute fonction f borélienne bornée sur \mathbb{R} , et pour tout $t > 0$, notons*

$$P_t(f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) dy.$$

Alors, pour $s < t$, on a

$$\mathbf{E}(f(B_t)/\mathcal{F}_s) = P_{t-s}f(B_s).$$

Démonstration. — Nous utilisons une fois de plus que la variable $Z = B_t - B_s$ est indépendante de \mathcal{F}_s (proposition 2.1). On a alors

$$\mathbf{E}(f(B_t)/\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(f(B_s + Z)/\mathcal{F}_s) = h(B_s),$$

où $h(x) = \mathbf{E}(f(x + Z))$. On se rappelle maintenant que $Z = B_t - B_s$ est une variable gaussienne centrée de variance $t - s$, et on obtient le résultat. ■

Par analogie avec les résultat du chapitre 6, nous allons développer les propriétés de la famille d'opérateurs P_t .

Proposition 3.2. *La famille d'opérateurs linéaires $f \mapsto P_t(f)$, définie pour $t > 0$, vérifie*

1. $P_t \circ P_s = P_{t+s}$.
2. Si f est continue bornée, $\lim_{t \rightarrow 0} P_t(f)(x) = f(x)$, et $(t, x) \mapsto P_t(f)(x)$ est continue.
3. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $P_t(f) \in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\int_{\mathbb{R}} P_t(f)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

4. Si f a ses deux premières dérivées continues et bornées, alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (P_t(f)(x) - f(x)) = \frac{1}{2} f''(x).$$

5. Si f est bornée, alors $P_t(f)$ est de classe C^∞ , et, pour $t > 0$,

$$\partial_t P_t f = \frac{1}{2} \partial_x^2 P_t f.$$

6. Si de plus f a ses deux premières dérivées bornées,

$$\partial_x^2 P_t f = P_t(f'').$$

Démonstration. — Commençons par le premier point. Il suffit d'écrire, pour $0 < s < t < u$,

$$\mathbf{E}(f(B_u)/\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(f(B_u)/\mathcal{F}_t/\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(P_{u-t}(f)(B_t)/\mathcal{F}_s).$$

Ceci donne

$$P_{u-s}(f)(B_s) = P_{t-s}(P_{u-t})(f)(B_s).$$

Puis on identifie.

Pour le second point, on a

$$P_t(f)(x) = \mathbf{E}(f(x + B_t)) = \mathbf{E}(f(x + \sqrt{t}X)),$$

où X est une variable gaussienne centrée réduite. On peut ensuite passer à la limite.

Le troisième point résulte de l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue. Si f est positive intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, on écrit

$$\int P_t(f)(x) dx = \int \int f(x + \sqrt{t}u) dx \gamma(du),$$

où la mesure $\gamma(du)$ est la mesure gaussienne standard, puis on applique le théorème de Fubini.

Le point 4 est plus délicat. Commençons par le cas où la fonction f a ses trois premières dérivées bornées.

Alors on écrit, à l'aide d'une formule de Taylor à l'ordre 2 et d'une variable gaussienne X centrée réduite

$$P_t(f)(x) = \mathbf{E}(f(x + \sqrt{t}X)) = f(x) + \sqrt{t}f'(x)\mathbf{E}(X) + \frac{t}{2}f''(x)\mathbf{E}(X^2) + t^{3/2}\mathbf{E}(K),$$

où K est une fonction bornée.

On obtient ainsi

$$P_t(f)(x) = f(x) + \frac{t}{2}f''(x) + o(t),$$

ce qui donne la dérivée cherchée. On obtient ainsi dans ce cas la convergence uniforme de $\frac{P_t(f)-f}{t}$ vers $\frac{1}{2}f''$.

On obtient ainsi

$$\frac{P_{t+s}(f) - P_t(f)}{s} = P_t\left(\frac{P_s(f) - f}{s}\right).$$

On peut ainsi passer à la limite et obtenir

$$\partial_t P_t f = \frac{1}{2}P_t(f'')$$

pour f ayant 3 dérivées bornées.

Ceci se récrit

$$(3.2) \quad P_t(f) - f = \frac{1}{2} \int_0^t P_s f'' ds.$$

Si f a seulement deux dérivées continues et bornées, on peut trouver une suite de fonctions f_n ayant trois dérivées continues et bornées telles que f_n , f'_n et f''_n convergent uniformément vers f , f' et f'' respectivement (prendre par exemple $f_n = P_{1/n}(f)$).

On peut ensuite à la limite dans la formule précédente (3.2). On obtient alors le résultat en dérivant en $t = 0$, à condition de remarquer que, si f'' est continue bornée, la fonction $t \mapsto P_t(f'')(x)$ est continue.

Enfin, on démontre directement en dérivant sous le signe intégral que $P_t(f)$ est de classe C^∞ pour toute fonction f bornée, et que

$$\partial_t P_t f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} P_t f.$$

Enfin, le fait que $P_t(f'') = (P_t f)''$ vient du fait que P_t est une convolution, et donc que P_t commute aux dérivations. ■

La propriété de Markov a quelques conséquences intéressantes

Théorème 3.3. (*Loi du 0 – 1 de Blumenthal et Gettoor*) Considérons la tribu

$$\mathcal{F}_{0+} = \bigcap_{t>0} \mathcal{F}_t.$$

Alors, tous les éléments de la tribu \mathcal{F}_{0+} ont une probabilité 0 ou 1.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que, pour toutes les variables X \mathcal{F}_1 -mesurables bornées, on a

$$\mathbf{E}(X/\mathcal{F}_{0+}) = \mathbf{E}(X).$$

(On l'applique ensuite avec l'indicatrice d'un élément de \mathcal{F}_{0+}).

Par le théorème des classes monotones, il suffit de démontrer cette formule pour une famille stable par intersection qui engendre la tribu \mathcal{F}_1 . Pour cela, nous choisissons la classe \mathcal{C} des variables X qui s'écrivent

$$X = f_1(B_{t_1})f_2(B_{t_2}) \dots f_n(B_{t_n}),$$

où les fonctions f_1, \dots, f_n sont continues bornées, et $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 1$.

Il suffit pour une telle variable X de montrer que, pour une suite s_n décroissant vers 0, $\mathbf{E}(X/\mathcal{F}_{s_n})$ converge vers une variable constante. En effet, le théorème de convergence des martingales inverses nous permet d'affirmer que cette limite est presque sûrement égale à $\mathbf{E}(X/\mathcal{F}_{0+})$.

Choisissons un tel X . Pour $t_i < s < t_{i+1}$, nous avons

$$\mathbf{E}(X/\mathcal{F}_s) = f_1(B_{t_1})f_2(B_{t_2}) \dots f_i(B_{t_i})H_i(s, B_s),$$

pour une fonction $H_i(s, x)$ qu'on peut calculer explicitement (par exemple $H_{n-1}(s, x) = P_{t_n-s}(f_n)(x)$), et qui est continue. On voit ainsi que

$$\mathbf{E}(X/\mathcal{F}_{s_1}) = K(B_{s_1}),$$

avec une fonction K continue bornée. Ainsi, pour $0 < s < s_1$, on a

$$\mathbf{E}(X/\mathcal{F}_s) = P_{s_1-s}(K)(B_s),$$

et cette dernière quantité converge vers $P_{s_1}(K)(0)$ lorsque s converge vers 0. C'est donc bien une variable constante. C'est ce que nous voulions démontrer. ■

Remarque. — Il ne faudrait pas croire que cette propriété découle uniquement de la continuité du processus (B_t) . Considérons par exemple une variable gaussienne centrée réduite X , et le processus $X_t = tX$. Alors, pour cette famille de variables, \mathcal{F}_0 est triviale alors que $\mathcal{F}_{0+} = \sigma(X)$.

Une autre conséquence intéressante de la propriété de Markov est le

Théorème 3.4. *Soit X une variable \mathcal{F}_1 -mesurable et intégrable. Alors, la martingale $\mathbf{E}(X/\mathcal{F}_t)$ est continue sur $t \in [0, 1]$.*

Démonstration. — Avant de démontrer ce résultat, remarquons qu'il appelle quelques commentaires. La famille de variables aléatoires $(M_t = \mathbf{E}(X/\mathcal{F}_t))$ n'est définie pour tout t qu'à un ensemble de mesure nulle près. Ce qu'affirme ce résultat, c'est qu'on peut en choisir une version telle que, pour presque tout ω , la fonction $t \mapsto M_t$ est continue.

Par ailleurs, nous avons énoncé ce résultat pour $t \in [0, 1]$ par commodité. Il reste valable pour $t \in \mathbb{R}_+$ pour toute variable X mesurable par rapport à $\mathcal{F}_\infty = \vee_t \mathcal{F}_t$.

Nous commençons par établir le résultat pour les variables X de la famille \mathcal{C} introduite dans la démonstration de la loi du 0 – 1 (théorème 3.3). Dans ce cas, comme nous l'avons vu plus haut, nous avons une représentation explicite de la martingale M_t et nous constatons que cette représentation fournit une fonction continue de M_t .

Le résultat est encore vrai pour les combinaisons linéaires d'éléments de \mathcal{C} . Mais l'espace des combinaisons linéaires d'éléments de \mathcal{C} est dense dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbf{P})$. (C'est une propriété des familles \mathcal{C} de fonctions stables par multiplication qui engendre la tribu : en utilisant le théorème des classes monotones, on démontre que les combinaisons linéaires d'éléments de \mathcal{C} sont denses, d'abord dans L^2 , puis dans n'importe quel espace L^p .)

Considérons alors une variable X \mathcal{F}_1 -mesurable et intégrable, et une suite X_n , combinaison linéaire l'éléments de \mathcal{C} , qui converge vers X dans L^1 . La martingale $M_t^n = \mathbf{E}(X^n/\mathcal{F}_t)$ est continue.

Appliquons alors l'inégalité maximale de Doob du théorème 2.5 ; Pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\lambda \mathbf{P} \left(\sup_{t \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} |M_t^n - M_t^m| > \lambda \right) \leq \mathbf{E}(|X_n - X_m|).$$

Remarquons que, puisque M_t^n et M_t^m sont continues, alors

$$\sup_{t \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} |M_t^n - M_t^m| = \sup_{t \in [0, 1]} |M_t^n - M_t^m|.$$

Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que

$$\mathbf{P} \left(\sup_{t \in [0, 1]} |M_t^n - M_t^{n+1}| > 2^{-n} \right) \leq 2^{-n}.$$

En appliquant le lemme de Borel-Cantelli, on en déduit que, presque sûrement, à partir d'un certain rang

$$\sup_t |M_t^n(\omega) - M_t^{n+1}(\omega)| \leq 2^{-n}.$$

Pour un ω pour lequel ceci est vrai, la suite de fonctions continues $t \mapsto M_t^n(\omega)$ converge uniformément, vers une limite $\hat{M}_t(\omega)$ qui est continue. C'est ensuite une simple vérification de constater que, à t fixé, presque sûrement, $\hat{M}_t = \mathbf{E}(X/\mathcal{F}_t)$. ■

Le résultat de continuité des martingales est en fait assez proche de la loi du 0 – 1. Pour s'en convaincre, montrons qu'il permet de l'étendre à tous les temps.

Corollaire 3.5. *Soit $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$. Alors, aux ensembles de mesure nulle près, $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$.*

Remarquons que c'est bien la généralisation de la loi du 0 – 1, puisque \mathcal{F}_0 est la tribu triviale.

Démonstration. — Nous ne le démontrons que pour $t \in [0, 1[$, et laissons au lecteur le soin de l'étendre à tous les temps. Pour voir la propriété, on suit le schéma de la démonstration de la loi du 0 – 1, et on montre que, pour toute variable bornée \mathcal{F}_1 -mesurable, on a presque sûrement $\mathbf{E}(X/\mathcal{F}_{t+}) = \mathbf{E}(X/\mathcal{F}_t)$.

Pour cela, on considère la version continue de la martingale $M_t = \mathbf{E}(X/\mathcal{F}_t)$, et on constate que, si t_n décroît vers t , alors M_{t_n} converge presque sûrement vers M_t (par continuité), tandis que le théorème de convergence des martingales inverses nous dit que M_{t_n} converge presque sûrement vers $\mathbf{E}(X/\mathcal{F}_{t+})$. D'où la conclusion. ■

4 L'intégrale de Wiener

Nous avons vu (sans vraiment de démonstration) que les trajectoires du mouvement brownien $t \mapsto B_t(\omega)$ sont irrégulières. En particulier, elles ne sont jamais (avec probabilité 1) à variation bornée sur aucun intervalle.

On peut cependant définir une intégrale $\int_0^t f(s)dB(s)$, à condition que la fonction f vérifie $\int_0^t f^2(s)ds < \infty$ et ne soit pas aléatoire. Cette intégrale joue un rôle important dans les applications du mouvement brownien et en modélisation. Elle admet une généralisation (elle aussi très importante) au

cas d'intégrands $f(s, \omega)$ convenablement mesurables (en gros lorsqu'à chaque instant s , $f(s, \omega)$ est \mathcal{F}_s -mesurable), mais ceci dépasse de beaucoup le cadre de cet exposé.

La construction de cette intégrale est contenue dans le

Théorème 4.1. (*Intégrale de Wiener*) *Il existe une unique application linéaire continue*

$$I : L^2([0, 1], dx) \mapsto L^2(\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbf{P})$$

telle que $I(\mathbf{1}_{[0,t]}) = B_t$. Pour toute fonction f de $L^2([0, 1], dx)$, $I(f)$ est une variable gaussienne centrée de covariance $\int_0^1 f^2(t)dt$. En particulier, I réalise une isométrie entre $L^2([0, 1], dx)$ et son image dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbf{P})$. On notera $I(f) = \int_0^1 f(t)dB_t$.

De plus, si f_1, \dots, f_n sont des fonctions de $L^2([0, 1], dt)$, le vecteur

$$(I(f_1), I(f_2), \dots, I(f_n))$$

est gaussien centré de covariance

$$\mathbf{E}(I(f_i)I(f_j)) = \int_0^1 f_i(t)f_j(t)dt.$$

Démonstration. — Soit f une fonction en escalier

$$f(t) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t),$$

avec $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq 1$. Par linéarité, on doit avoir

$$I(f) = \sum_{i=1}^n a_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

C'est une variable gaussienne centrée, dont il est facile de calculer la covariance car les variables $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ sont indépendantes centrées de covariance $t_{i+1} - t_i$. On remarque alors que

$$\mathbf{E}(I(f)^2) = \sum_i a_i^2 (t_{i+1} - t_i) = \int_0^1 f^2(t)dt = \|f\|_2^2.$$

Les fonctions en escalier sont denses dans $L^2([0, 1], dt)$, et I se prolonge par continuité en une unique application définie sur $L^2([0, 1], dt)$ vérifiant

$$\mathbf{E}(I(f)^2) = \int_0^1 f^2(t)dt.$$

Une limite dans L^2 de variables gaussiennes étant gaussienne, nous voyons que $I(f)$ est une gaussienne centrée de variance $\|f\|_2^2$. C'est tout ce dont on a besoin.

Par bilinéarité, on aura aussi

$$\mathbf{E}(I(f_1)I(f_2)) = \int f_1 f_2 dt.$$

La dernière propriété est évidente lorsque les fonctions sont en escalier, et se prolonge à toutes les fonctions de L^2 par continuité. ■

Une conséquence immédiate est le

Théorème 4.2. *Soit (e_n) une base orthonormée de $L^2([0, 1], dt)$. Alors, les variables*

$$X_n = \int_0^1 e_n(s) dB_s$$

forment une suite de variables gaussiennes centrées et indépendantes.

Si l'on écrit $E_n(t) = \int_0^t e_n(u) du$, on a, pour $t \in [0, 1]$,

$$B_t = \sum_n E_n(t) X_n.$$

On retrouve alors la construction du mouvement brownien à partir d'une base orthogonale de $L^2([0, 1], dt)$ que nous avons faite au départ.

Démonstration. — Le fait que les variables X_n soit des gaussiennes centrées réduites indépendantes provient directement de la définition de l'intégrale de Wiener.

Pour la suite, nous écrivons

$$\sum_n E_n(t) X_n = \sum_n E_n(t) \int_0^1 e_n(s) dB_s = \int_0^1 \left(\sum_n E_n(t) e_n(s) \right) dB_s,$$

la dernière égalité ayant lieu dans $L^2(\Omega)$, à t fixé.

Or, $\sum_n E_n(t) e_n = \mathbf{1}_{[0, t]}$, puisque (e_n) est une base orthonormée de $L^2([0, 1])$. On en déduit

$$\sum_n E_n(t) X_n = \int_0^1 \mathbf{1}_{[0, t]}(s) dB_s = B_t.$$

■

On peut également écrire avec ces intégrales des formules d'intégration par parties. Cela permet de ramener pour des fonctions f dérivables l'intégrale de Wiener à une intégrale de Riemann ordinaire.

Proposition 4.3. *Soit f une fonction de $L^2([0, 1])$. Alors*

$$\int_0^1 f(t)B_t dt = \int_0^1 F(t)dB_t,$$

où $F(t) = \int_t^1 f(s)ds$.

Démonstration. — Remarquons que dans la formule précédente le membre de gauche est une intégrale ordinaire. On a intégré la fonction $f(t)B_t(\omega)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. Le résultat est une variable gaussienne centrée dont la variance est donnée par la formule.

Pour s'en convaincre, on commence par le cas où f est une indicatrice d'intervalle $f = \mathbf{1}_{[0,t]}$. On a simplement à écrire

$$\int_0^t B_s ds = \int (t-s)\mathbf{1}_{s \leq t} dB_s = tB_t - \int_0^t s dB_s.$$

Il nous faut donc voir que

$$\int_0^t B_s ds + \int_0^t s dB_s = tB_t.$$

On choisit pour cela une suite de subdivisions $(s_i^{(n)})$ de $[0, t]$ dont le pas converge vers 0, et on approche les deux intégrales par des sommes finies. On obtient (en supprimant les indices (n))

$$\int_0^t B_s ds = \lim \sum_i B_{s_{i+1}}(s_{i+1} - s_i),$$

tandis que

$$\int_0^t s dB_s = \lim \sum_i s_i(B_{s_{i+1}} - B_{s_i}).$$

La somme de ces deux approximations vaut tB_t .

Remarquons que la première approximation converge partout (intégrale de Riemann d'une fonction continue sur un intervalle), tandis que la seconde converge dans L^2 .

La formule de l'énoncé étant vraie pour les fonctions $\mathbf{1}_{[0,t]}$, elle est vraie pour leurs combinaisons linéaires, c'est à dire pour les fonctions en escalier.

Pour une telle fonction, on sait donc que $\int f(s)B_s ds$ est une variable gaussienne centrée de variance $\int F^2(s)ds$, avec $F(t) = \int_t^1 f(s)ds$. L'application $f \mapsto F$ étant continue dans $L^2([0, 1])$, l'application $f \mapsto \int f(s)B_s ds$ est continue de $L^2([0, 1])$ dans $L^2(\Omega)$, et on peut alors prolonger la formule des fonctions en escalier à toutes les fonctions de $L^2([0, 1])$.

■

Enfin, nous remarquons que la construction que nous venons de faire s'étend sans peine aux processus gaussiens à accroissements indépendants. Nous avons vu dans la section 1 que les processus gaussiens à accroissements indépendants étaient caractérisés par le fait que leur noyau de covariance s'écrivait $K(s, t) = F(s \wedge t)$, pour une fonction $F(t) = K(t, t)$ croissante. On peut donc les réaliser sous la forme

$$Y_t = B_{F(t)},$$

où B_t est un mouvement brownien.

Supposons alors que la fonction F soit continue à droite. Elle est alors naturellement associée à une mesure positive μ sur \mathbb{R} par l'identité

$$\mu(]a, b]) = F(b) - F(a).$$

(μ s'appelle la mesure de Stieltjes associée à F et est en général notée dF).

Dans ce cas, la construction de l'intégrale de Wiener s'étend immédiatement.

Proposition 4.4. (*Intégrale de Wiener*) Soit Y_t un processus gaussien centré à accroissements indépendants de variance $F(t) = \mathbf{E}(Y_t^2)$ continue à droite, et μ la mesure de Stieltjes associée à la fonction F . Il existe une unique application linéaire continue

$$I : L^2(\mathbb{R}, d\mu) \mapsto L^2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbf{P})$$

telle que $I(\mathbf{1}_{]a,b]}) = Y_b - Y_a$. Pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, $I(f)$ est une variable gaussienne centrée de covariance $\int_{\mathbb{R}} f^2(t)d\mu$. En particulier, I réalise une isométrie entre $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ et son image dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbf{P})$. On notera $I(f) = \int_0^1 f(t)dY_t$.

De plus, si f_1, \dots, f_n sont des fonctions de $L^2([0, 1], dt)$, le vecteur

$$(I(f_1), I(f_2), \dots, I(f_n))$$

est gaussien centré de covariance

$$\mathbf{E}(I(f_i)I(f_j)) = \int_{\mathbb{R}} f_i(t)f_j(t)d\mu((t)).$$

Démonstration. — Il n’y a qu’à recopier la démonstration faite pour la construction de l’intégrale de Wiener par rapport au mouvement brownien (4.1), en remarquant cette fois-ci que pour une fonction étagée $f = \sum_i c_i \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}]}$, on aura

$$I(f) = \sum_i c_i (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}),$$

et qu’alors

$$\mathbf{E}(I(f)^2) = \int_{\mathbb{R}} f^2(t)d\mu(t) = \sum_i c_i^2 (F(t_{i+1}) - F(t_i)).$$

■

5 Processus gaussiens de covariance donnée.

Un processus gaussien est une famille de variables aléatoires réelles $(X_t, t \in I)$, où I est un ensemble d’indices, qui est tel que, pour tout n -uplet (t_1, \dots, t_n) d’éléments de I , la variable aléatoire $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est une variable gaussienne (à valeurs dans \mathbb{R}^n).

La loi du processus est par définition la donnée pour tous les n -uplets (t_1, \dots, t_n) de la loi du vecteur $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$.

Pour un processus gaussien, cette loi est entièrement caractérisée par la donnée de l’espérance $e(t) = \mathbf{E}(X_t)$ et de la covariance $K(s, t) = \mathbf{E}(X_t X_s) - e(s)e(t)$.

On dira que le processus gaussien est centré si $e(t) = 0$. Quitte à changer X_t en $X_t - e(t)$, on pourra toujours supposer que le processus est centré.

Le noyau $K(s, t)$ a la propriété fondamentale suivante

Proposition 5.1. *Pour tout n -uplet (t_1, \dots, t_n) de points de T , et tout n -uplet (c_1, \dots, c_n) de réels,*

$$\sum_{i,j} c_i c_j K(t_i, t_j) \geq 0.$$

Démonstration. — On se ramène au cas centré. Ensuite, il suffit de développer

$$\mathbf{E}\left(\sum_i c_i X_{t_i}\right)^2 = \sum_{ij} c_i c_j \mathbf{E}(X_{t_i} X_{t_j}).$$

■

La propriété énoncée dans la proposition 5.1 caractérise en fait les fonctions de covariance des processus gaussiens.

Proposition 5.2. *Soit $K(s, t)$ une fonction symétrique sur $T \times T$ satisfaisant la propriété de la proposition 5.1, alors il existe un processus gaussien centré admettant K comme noyau de covariance.*

Démonstration. — La preuve repose sur une construction abstraite du processus, que nous ne faisons qu'esquisser. On considère l'espace vectoriel H_0 des fonctions $T \mapsto \mathbb{R}$ de la forme $F_{(c_i, t_i)}(t) = \sum_i c_i K(t, t_i)$, où les (t_i) varient parmi les n -uplets de points de T et les c_i parmi les vecteurs de \mathbb{R}^n .

Pour deux points $F = \sum_i c_i K(t, t_i)$ et $G = \sum_j c'_j K(t, t'_j)$, on définit le produit scalaire de F et G par

$$F \cdot G = \sum_{i,j} c_i c'_j K(t_i, t'_j).$$

Par la propriété fondamentale de K , nous voyons que $F \cdot F \geq 0$.

On quotiente alors H_0 par les éléments de norme nulle, c'est à dire qu'on décide que $F = F'$ si $(F - F') \cdot (F - F') = 0$, puis on complète l'espace H_0 pour en faire un espace de Hilbert H .

L'espace H s'appelle l'espace autoreproduisant associé au noyau de covariance K .

Si cet espace de Hilbert est séparable (il l'est automatiquement dès que par exemple T est un intervalle de \mathbb{R} et que $K(s, t)$ est continue), on choisit alors une base orthonormée (e_n) de H , et on pose

$$K(t, s) = \sum_n a_n(s) e_n(t).$$

Puisque la fonction $t \mapsto K(t, s)$ est dans H_0 , donc dans H , on voit que

$$\sum_n a_n(s)^2 < \infty.$$

Par orthogonalité de (e_n) on a

$$\sum_n a_n(s)a_n(s') = K(s, s'),$$

par définition du produit scalaire.

On choisit alors une suite de variables gaussiennes centrées réduites $N(0, 1)$ et indépendantes (Y_n) , et on considère la variable gaussienne

$$X_s = \sum_n a_n(s)Y_n.$$

C'est une série convergente dans L^2 , et le processus $(X_t, t \in T)$ est gaussien centré. De plus

$$\mathbf{E}(X_s X_{s'}) = \sum_n a_n(s)a_n(s') = K(s, s').$$

■

Cette construction est en générale trop abstraite pour être vraiment utilisable, sauf dans certains cas précis. Mais pour le mouvement brownien (avec $t \in [0, 1]$), on peut facilement identifier l'espace H . On remarque que, si $f_t(s) = s \wedge t$, on doit avoir que le produit scalaire de f_{t_1} et f_{t_2} doit être $t_1 \wedge t_2$, qui est aussi le produit scalaire de f'_{t_1} et f'_{t_2} dans $L^2([0, 1])$.

Alors on voit que pour les éléments de H_0 , on a

$$F.G = \int_0^1 F'(s)G'(s)ds.$$

L'espace H est alors facile à identifier : c'est l'espace des fonctions $F(t)$ qui s'écrivent

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds,$$

avec $f \in L^2([0, 1])$, et, si l'on note $\dot{F} = f$,

$$F.G = \int_0^1 \dot{F}(s)\dot{G}(s)ds.$$

En général, l'identification de cet espace H est beaucoup plus compliquée.

Dans la pratique, on peut faire autrement pour construire le processus. L'idée générale est d'écrire le noyau $K(s, t)$ sous la forme $\sum_i f_i(s)f_i(t)$.

Dans ce cas, en écrivant $X_t = \sum_i f_i(s)X_i$, où X_i est une somme de variables aléatoires gaussiennes $N(0, 1)$ indépendantes, on obtient ainsi un processus gaussien centré X_t de covariance $K(s, t)$.

La méthode la plus standard pour obtenir cette décomposition est la suivante. Supposons que le noyau $K(s, t)$ sur l'espace des paramètres soit mesurable (pour une certaine tribu) et qu'on puisse trouver une mesure finie μ sur l'espace des paramètres telle que

$$\int K(s, s)d\mu(s) < \infty.$$

Dans ce cas, si le noyau K vérifie les conclusions de la condition de la proposition 5.1, on a $K^2(s, t) \leq K(s, s)K(t, t)$, et par conséquent

$$(5.3) \quad \int K^2(s, t)d\mu(s)d\mu(t) < \infty.$$

C'est un exercice de vérifier que la condition entraîne que, pour toute fonction f de carré intégrable (pour μ), on a

$$(5.4) \quad \int K(s, t)f(s)f(t)d\mu(s)d\mu(t) \geq 0.$$

On considère alors l'opérateur défini dans $L^2(\mu)$ par

$$K(f)(t) = \int K(s, t)f(s)d\mu(s).$$

C'est un opérateur symétrique dans $L^2(\mu)$, et la condition d'intégrabilité (5.3) montre qu'il est diagonalisable dans $L^2(\mu)$. Il existe une base (e_n) de $L^2(\mu)$ formée de vecteurs propres de l'opérateur $K : K(e_n) = \lambda_n e_n$. La formule (5.4) montre que les valeurs propres λ_n sont positives.

De plus, on a l'identité (dans $L^2(\mu \otimes \mu)$)

$$(5.5) \quad K(s, t) = \sum_n \lambda_n e_n(s)e_n(t).$$

Alors, le processus

$$\sum_n \sqrt{\lambda_n} X_n e_n(s)$$

est bien de covariance $K(s, t)$.

Le problème ici est qu'en général on n'a l'identité (5.5) que presque sûrement pour la mesure μ , et qu'il faut souvent travailler un peu pour avoir l'identité partout (lorsque le noyau $K(s, t)$ est continu pour une certaine topologie, par exemple, et qu'on arrive à montrer que l'identité (5.5) a lieu en tant que fonctions continues sur $T \times T$).

Il n'est pas non plus toujours très facile de trouver les vecteurs propres de l'opérateur K .

Lorsque T est un intervalle de \mathbb{R} se pose ensuite le problème de savoir si on peut trouver un processus (X_t) à trajectoires continues.

Le critère suivant est assez utile

Théorème 5.3. *Si T est un intervalle de \mathbb{R} et qu'il existe une constante C telle que, pour tous les points s et t de T , on ait*

$$\mathbf{E}((X_t - X_s)^2) = K(t, t) + K(s, s) - 2K(s, t) \leq C |t - s|,$$

alors on peut trouver une version du processus X_t qui est à trajectoires continues sur T .

Démonstration. — Pour le voir, nous allons nous appuyer sur un critère que nous ne démontrerons pas (nous renvoyons pour cela à [5], p. 90, par exemple).

Supposons qu'il existe deux fonctions $\epsilon(h)$ et $\eta(h)$ définies sur un voisinage $]0, \delta]$ satisfaisant

$$\int_0^\delta \epsilon(h) \frac{dh}{h} < \infty, \quad \int_0^\delta \eta(h) \frac{dh}{h^2} < \infty,$$

et telles que

$$\mathbf{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq \epsilon(h)) \leq \eta(h).$$

Alors, le processus X_t admet une version à trajectoires continues.

Ici, pour des variables gaussiennes, si la variance de $X_{t+h} - X_t$ est majorée par Ch , alors

$$\mathbf{E}((X_{t+h} - X_t)^4) \leq C'h^2,$$

et par l'inégalité de Markov

$$\mathbf{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq \epsilon) \leq C' \frac{h^2}{\epsilon^2}.$$

Il suffit alors de prendre $\epsilon(h) = h^\alpha$, avec $0 < \alpha < \frac{1}{4}$, pour obtenir le résultat. ■

Enfin, un cas particulier important est celui des processus stationnaires.

Définition 5.4. On dit que le processus gaussien centré $(X_t, t \in \mathbb{R})$ est stationnaire si la loi covariance $K(s, t)$ ne dépend que de $t - s$. Dans ce cas, la fonction $k(t) = K(0, t)$ s'appelle la fonction d'autocovariance.

Proposition 5.5. Considérons un processus gaussien stationnaire de covariance $K(s, t) = k(t - s)$, où nous supposons la fonction k continue en 0. Alors, la fonction k est continue sur \mathbb{R} , et il existe une mesure bornée positive symétrique μ sur \mathbb{R} telle que

$$k(s) = \int_{\mathbb{R}} \exp(isx) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos(sx) d\mu(x).$$

Cette mesure s'appelle la mesure spectrale du processus.

Démonstration. —

Le théorème de Bochner affirme qu'une fonction F (à valeurs complexes éventuellement) est la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité sur \mathbb{R} si et seulement si elle satisfait

- $F(0) = 1$.
- F est continue en 0.
- Pour tout choix des nombres complexes c_1, \dots, c_n et des réels t_1, \dots, t_n ,

$$\sum_{ij} c_i \bar{c}_j F(t_i - t_j) \geq 0.$$

Nous n'allons pas démontrer ce résultat. En fait, la propriété caractéristique des covariance de la proposition 5.1 nous montre que, pour tout choix des paramètres réels c_i et t_i , on a

$$\sum_{ij} c_i c_j k(t_i - t_j) \geq 0.$$

Avec la condition de continuité en 0, ceci est caractéristique des transformées de Fourier des mesures positives bornées. Ici, grâce à la propriété caractéristique des fonctions de covariance, on a pour tout choix de complexes

$$\sum_{ij} c_i \bar{c}_j k(t_i - t_j) = \mathbf{E} \left(\left| \sum_i c_i X_{t_i} \right|^2 \right) \geq 0.$$

En prenant juste deux valeurs, nous voyons que

$$k(t)^2 \leq k(0)^2.$$

Si $k(0) = 0$, tout est nul et il n'y a pas grand chose à en dire.

Si $k(0) > 0$, alors la fonction $\frac{k(t)}{k(0)}$ vérifie les hypothèses du théorème de Bôchner. C'est donc la transformée de Fourier d'une mesure de probabilité, et puisque $F(t) = F(-t)$, cette mesure est une mesure symétrique sur \mathbb{R} . On voit alors que k est la transformée de Fourier d'une mesure positive symétrique de masse totale $k(0)$.

■

Dans ce cas, la méthode de l'intégrale de Wiener permet de construire le processus gaussien stationnaire à partir du mouvement brownien.

En effet, appelons $F(t) = \mu([-\infty, t])$, où μ est la mesure spectrale, et considérons $Y_t = B_{F(t)}$, où B_t est un mouvement brownien.

On a alors

Proposition 5.6. *Soit $k(t)$ une fonction d'autocovariance d'un processus gaussien stationnaire de mesure spectrale μ . Soit $F(t) = \mu([-\infty, t])$ et B_t et \hat{B}_t deux mouvements browniens indépendants. Posons $Y_s = B_{F(s)}$ et $\hat{Y}_s = \hat{B}_{F(s)}$. Ce sont deux processus indépendants, gaussiens centrés à accroissements indépendants de fonction de covariance $F(s \wedge t)$. Alors, le processus*

$$X_t = \int \cos(ts) dY_s + \int \sin(ts) d\hat{Y}_s$$

est un processus gaussien centré stationnaire de fonction d'autocovariance k .

Démonstration. — Décomposons $X_t = X_t^1 + X_t^2$, avec

$$X_t^1 = \int \cos(ts) dY_s, \quad X_t^2 = \int \sin(ts) d\hat{Y}_s.$$

Alors, pour $t \neq s$, (X_t^1, X_s^1) est indépendante de (X_t^2, X_s^2) , et en faisant le calcul de $\mathbf{E}(X_t X_s)$, nous trouvons, par isométrie de l'intégrale de Wiener,

$$\int_{\mathbb{R}} \cos(tx) \cos(sx) + \sin(tx) \sin(sx) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \cos((t-s)x) d\mu(x) = k(t-s).$$

■

Remarque. — Dans la proposition 5.6, le résultat serait beaucoup plus simple si nous acceptions des variables gaussiennes complexes, car alors le processus $\int_{\mathbb{R}} \exp(its) dY_s$ répond à la question.

Bibliographie

- [1] P. Barbe and M. Ledoux. *Probabilité, De la licence à l'agrégation*. Espace 34, Belin, Montpellier, 1998.
- [2] C. Dellacherie and P. A. Meyer. *Probabilités et potentiel*. Hermann, Paris, 1975. Chapitres I à IV, Édition entièrement refondue, Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. XV, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1372.
- [3] C. Dellacherie and P.A. Meyer. *Probabilités et potentiel. Chapitres V à VIII*, volume 1385 of *Actualités Scientifiques et Industrielles [Current Scientific and Industrial Topics]*. Hermann, Paris, revised edition, 1980. Théorie des martingales. [Martingale theory].
- [4] G. Fayolle, V. A. Malyshev, and M. V. Menshikov. *Topics in the constructive theory of countable Markov chains*. Cambridge University Press, 1995.
- [5] J. Neveu. *Bases mathématiques du calcul des probabilités*. Masson, Paris, 1970.
- [6] J. Neveu. *Martingales à temps discret*. Masson, Paris, 1972.
- [7] P. Toulouse. *Thèmes de Probabilités et Statistique, Agrégation de mathématiques*. Dunod, Paris, 1999.