



## Filtrage des mesures de vitesse d'un fluide par estimation particulaire

christophe.baehr@meteo.fr

Journées MAS 2006 - Lille

# **Introduction aux Modèles Euler/Lagrange de S.B. Pope.**

# Modèles Euler/Lagrange de S.B. Pope.

- Ce sont des modèles d'évolution (Lagrangiens) de particules sans inertie, utilisant des moyennes locales (Eulériennes).
- A la base on retrouve des équations de Langevin.
- La mise en forme de l'équation utilise des modèles empiriques (Modèle de Rotta pour les tensions de Reynolds) et reste compatible avec l'équation de Navier-Stokes.
- On identifie certains termes par des comportements en temps longs qui respectent les lois de Kolmogorov (K41) pour la turbulence.

# Modèles Euler/Lagrange de S.B. Pope.

- On considère que les particules dont le mouvement est régi par ces modèles sont placées dans un fluide obéissant aux équations de Navier-Stokes.
- On note  $U_{t,x}$  le champ de vitesse donné par :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_{t,x} \nabla\right) \cdot U_{t,x} = -\nabla p + \mu \cdot \Delta U_{t,x} \text{ dans } \Omega, t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3$$

$$U_{t,x} = f(t, x) \text{ sur } \partial\Omega, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3$$

$$U_{0,x} = U_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

# Modèles Euler/Lagrange de S.B. Pope.

- On utilise la décomposition de Reynolds en mouvement moyen et fluctuation pour une quantité  $Q$  :

$$Q_{t,x} = \langle Q \rangle_{t,x} + q_{tx}$$

- Le terme  $\langle Q \rangle_{t,x}$  signifie que l'on considère  $Q$  comme une v.a., que l'on dispose d'un espace de probabilité  $(\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et que l'on soit capable de calculer

$$\langle Q \rangle_{t,x} = \int_{\mathcal{E}} Q_{t,x}(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

- Cette quantité  $\langle Q \rangle_{t,x}$  est donc la moyenne locale en un point  $x$  au temps  $t$ .

# Modèles Euler/Lagrange de S.B. Pope.

- Pour une particule si on note  $x(x_0, t)$  sa position à l'instant  $t$  sachant qu'elle était en  $x_0$  à l'instant initial, on appelle vitesse lagrangienne la quantité  $V_t = U(x(x_0, t), t)$ .

- Les modèles de Pope sont relatifs à cette vitesse lagrangienne.

- Pour la turbulence homogène isotrope, il s'écrit:

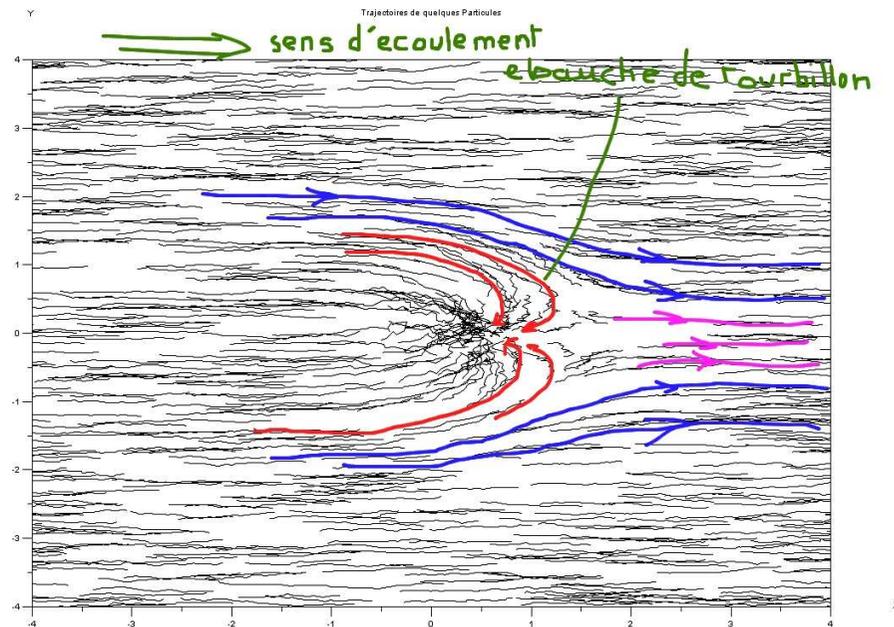
$$dV_t = -\nabla_x \langle p \rangle dt - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}C_0\right) \frac{\varepsilon_t}{k_t} (V_t - \langle v \rangle) dt + \sqrt{C_0 \varepsilon_t} dW_t$$

- L'équation de Langevin correspondante est:

$$m \frac{dV}{dt} = F_{\text{pression}} + F_{\text{frottement}} + F_{\text{aleatoire}}$$

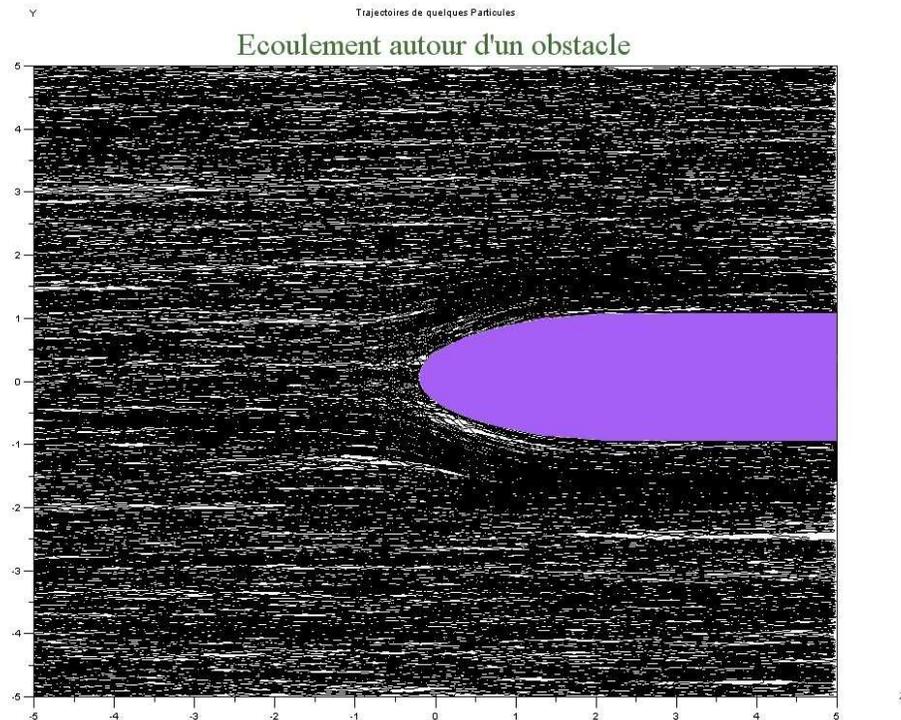
# Modèles Euler/Lagrange de S.B. Pope.

- Malgré cette simplicité d'apparence, ce modèle est-il réaliste pour un fluide ?



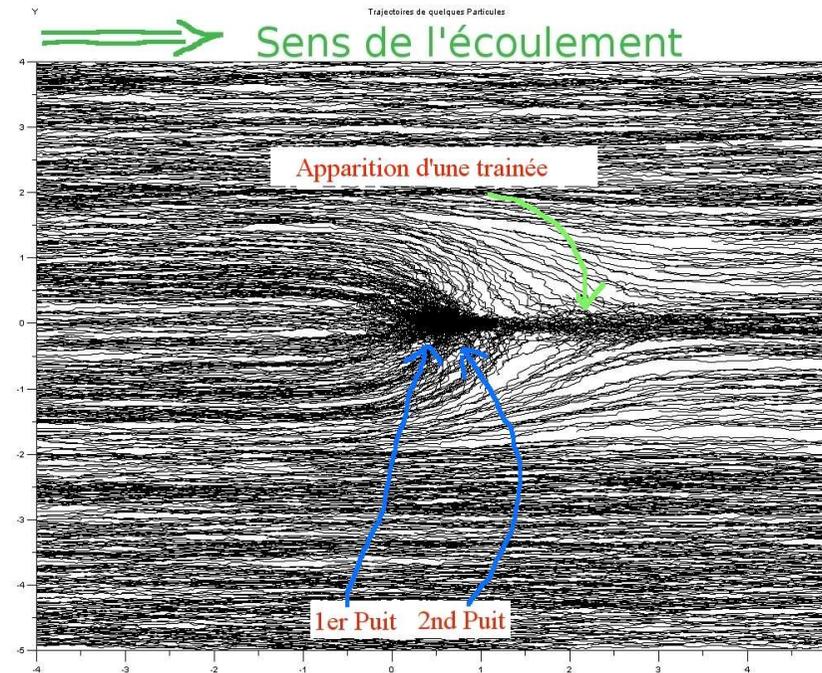
# Modèles Euler/Lagrange de S.B. Pope.

● ou bien:



# Modèles Euler/Lagrange de S.B. Pope.

● ou encore:



# Modèle de Pope discrétisé

# Modèle stochastique discrétisé.

- On part du couple (position  $\mathcal{X}_t$ , vitesse  $\mathcal{V}_t$ ) que l'on suppose markovien.
- On utilise les lois de Newton pour former le système:

$$\begin{cases} d\mathcal{X}_t &= \mathcal{V}_t dt \\ d\mathcal{V}_t &= \mathbb{F}(\mathcal{V}_t, \dots), \quad t \geq 0 \\ V_0 &= v_0 \end{cases}$$

- En discrétisant les vitesses en des temps  $t_j = j \cdot \Delta t$ ,  $\forall j \in \mathbb{Z}$  et  $\Delta t > 0$  est un pas de temps fixe, on sépare les échelles.
- La vitesse  $\mathcal{V}_n$  s'écrit comme une vitesse de grande échelle  $V_n$  plus un bruit correspondant aux structures sous-maille.

# Modèle stochastique discrétisé.

- Pour modéliser les petites échelles, on va utiliser un mouvement brownien.
- Le système de base est alors :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_n &= \mathcal{X}_{n-1} + V_{n-1} \Delta t + \sigma_n \Delta W_n^X \\ V_n &= F(V_{n-1}, \dots) \Delta t + G(V_{n-1}, \dots) \Delta W_n^V \\ V_0 &= v_0, \quad X_0 = x_0 \end{cases}$$

- Ce système serait celui de la vitesse  $V_n$  observée par les positions  $\mathcal{X}_n$  des éléments de fluide.

# Modèle stochastique discrétisé.

- La moyenne Eulérienne  $\langle \varphi(U_{n,x}) \rangle = \int \varphi(u) p^{U_{n,x}}(u) du$  n'est pas bien posée relativement au Markov  $(X_n, V_n)$ .
- On définit  $\mathbb{F}(\varphi)(x) = \int \varphi(v) p^{X_n, V_n}(x, v) dv$  et on fait une approximation faible de  $\mathbb{F}$  en régularisant par un noyau

$$\mathbb{F}^\delta = \iint \varphi(v) G^\delta(x - z) p^{X_n, V_n}(z, v) dz dv$$

- On définit alors  $\Pi_n^\delta(\varphi)(x) \stackrel{def}{=} \mathbb{E}_\delta(\varphi(V_n) | X_n = x) = \frac{\mathbb{F}_n^\delta(\varphi)(x)}{\mathbb{F}_n^\delta(1)(x)}$
- Si  $(X_n^i, V_n^i)_{1 \leq i \leq N}$  sont les particules à l'instant  $n$ , alors

$$\Pi_n^\delta(\varphi)(X_n^i) \approx \Pi_n^{\delta, N}(\varphi)(X_n^i) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varphi(V_n^j) G^\delta(X_n^i - X_n^j)}{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N 1 \cdot G^\delta(X_n^i - X_n^k)}$$

# Modèle stochastique discrétisé.

- On a maintenant les moyens d'identifier les paramètres du modèle.

- Pour mémoire:

$$\Delta V_n = -\nabla_x \langle p \rangle \Delta t - C_1 \frac{\varepsilon_n}{k_n} (V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n)) \Delta t + \sqrt{C_0 \varepsilon_n} \Delta W_n$$

avec  $k_n \stackrel{def}{=} \Pi_n^\delta[(V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n))^2](X_n)$

- Il faut voir  $-\nabla_x \langle p \rangle$  comme une V.A. exogène que l'on va enclore dans la variable  $\mathbb{E}(Z_n)$ .

- Quand  $\delta \rightarrow 0$ , on a  $\mathbb{E}(\Delta V_n) = \mathbb{E}(Z_n) \cdot \Delta t$

- De même pour  $\varepsilon_n$  on écrit:  $\mathbb{E}(\Delta V_n \cdot \Delta V_n) = C_0 \cdot \mathbb{E}(\varepsilon_n) \cdot \Delta t$

# Filtrage des vitesses d'un fluide

# Problème de filtrage d'un fluide

- Objectif: Estimer les composantes d'un fluide à l'aide d'observations partielles et bruitées.
- Modèle de filtrage stochastique:
  - Signal fluide  $\mathcal{X}_n = (X_n, V_n)$  en champ moyen conditionnel.
  - Observations de vitesses bruitées  $\mathcal{Y}_n$ .
- Problème : Calculer la *Loi*  $(\mathcal{X}_0, \dots, \mathcal{X}_n | \mathcal{Y}_0, \dots, \mathcal{Y}_n)$ .
- Modèle a priori / Modèle conditionné par l'observation

# Modèle de filtrage d'un fluide.

• Le système du fluide filtré :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{n+1} = X_n + V_n \Delta t + \sigma_n^X \Delta W_n^X \\ V_{n+1} = V_n + \mathbb{E}(Z_n | Y_0 \dots Y_n) \Delta t \\ \quad - C_1 \frac{\mathbb{E}(\varepsilon_n | Y_0 \dots Y_n)}{k_n} \\ \quad \left[ V_n - \frac{\int v G^\delta(X_n - x) \mathbb{P}^{(X_n, V_n | Y_0 \dots Y_n)}(d(x, v))}{\int 1 G^\delta(X_n - x) \mathbb{P}^{(X_n, V_n | Y_0 \dots Y_n)}(d(x, v))} \right] \Delta t \\ \quad + \sqrt{C_0 \mathbb{E}(\varepsilon_n | Y_0 \dots Y_n)} \Delta W_n^V \\ Y_n = H(V_n) + (h(\sigma_n^X W_n^X)) + \sigma^Y W_n^Y \end{array} \right.$$

avec

$$k_n = \int \left[ w - \frac{\int v G^\delta(z - x) \mathbb{P}^{(X_n, V_n | Y_0 \dots Y_n)}(d(x, v))}{\int 1 G^\delta(z - x) \mathbb{P}^{(X_n, V_n | Y_0 \dots Y_n)}(d(x, v))} \right]^2 \mathbb{P}^{(X_n, V_n | Y_0 \dots Y_n)}(d(z, w))$$

# Modèle de filtrage d'un fluide.

- Modèle Stochastique de filtrage.  
On pose pour signal/observation:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{X}_n & = (X_n, V_n) & \text{Signal Fluide} \\ \mathcal{Y}_n & = \underbrace{h_n(\mathcal{X}_n)}_{=H(V_n)} + \underbrace{\text{Bruit}}_{\sim N(0, \sigma^Y)} & \text{Observation} \end{array} \right.$$

$\mathcal{X}_n$  est un Markov Conditionnel de loi de transition  $M_{n+1, \hat{\eta}_n}$  avec  $\hat{\eta}_n = \text{Loi}(\mathcal{X}_n | \mathcal{Y}_0^n)$

$$\mathbb{P}^{\mathcal{X}_{n+1} | \mathcal{X}_n, \mathcal{Y}_0^n} (d(z, v) | (x, u)) = M_{n+1, \hat{\eta}_n} ((x, u), d(z, v))$$

# Modèle de filtrage d'un fluide.

- La variance des bruits d'observation  $\sigma^Y$  fournit la résolution du signal fluide.
  - $\sigma^Y \sim 0$  haute résolution avec peu de frottements dus aux interactions de petites structures. En observation parfaite, on obtient les équations du fluide à résolution maximale :

$$\begin{cases} X_{n+1} &= X_n + V_n \Delta t + \sigma_n^X \Delta W_n^X \\ V_{n+1} &= V_n + Z_n \Delta t + \sqrt{C_0 \varepsilon_n} \Delta W_n^V \end{cases}$$

- $\sigma^Y \gg 0$  faible résolution, prise en compte des interactions de petites structures (sur des grandes échelles). Sans les observations, on retrouve le modèle de Pope discrétisé dans un milieu homogène.

# Localisation.

- Filtrage de fluide localisé dans des régions  $B_n$ .

Filtre :

$$\hat{\eta}_n^B = \mathcal{L}oi(\mathcal{X}_n | \mathcal{X}_0 \in B_0, \dots, \mathcal{X}_n \in B_n, \mathcal{Y}_0^n)$$

Prédicteur :

$$\eta_{n+1} = \mathcal{L}oi(\mathcal{X}_{n+1} | \mathcal{X}_0 \in B_0, \dots, \mathcal{X}_n \in B_n, \mathcal{Y}_0^n) = \hat{\eta}_n^B M_{n+1, \hat{\eta}_n^B}$$

- Modèle de signal fluide localisé.

$$\mathcal{X}_n^B \in B_n \xrightarrow{M_{n+1, \hat{\eta}_n^B}} \mathcal{X}_{n+1} \xrightarrow{S_{\eta_{n+1}}^{B_{n+1}}} \mathcal{X}_{n+1}^B \in B_{n+1}$$

en définissant

$$B_{n+1} = \{(x, v) : d(x, m_{n+1}) \leq R\} \text{ où } m_{n+1} = \int x \eta_{n+1}(dx)$$

et le noyau de sélection

$$S_{\eta}^B(x, dy) = \mathbb{1}_B(x) \delta_x(dy) + \mathbb{1}_{B^c}(x) \frac{\mathbb{1}_B(y) \eta(dy)}{\eta(B)}$$

# Interprétation particulière.

- On va alors utiliser un algorithme particulière pour estimer les paramètres du fluide.

Filtre optimal = ( Prédiction / Correction )



Filtre particulière = ( Mutation / Sélection )

- Convergence par Arbres Généalogiques:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\text{lignes ancestrales}^{(i)}} \stackrel{N \rightarrow \infty}{\sim} \mathcal{Loi}(\mathcal{X}_0, \dots, \mathcal{X}_n | \mathcal{Y}_0, \dots, \mathcal{Y}_n)$$

cf P. Del Moral *Feynman-Kac Formulæ, Genealogical and Interacting Particle Systems*, Springer 2004

# Dynamique de la population.

- L'étape de sélection

$\mathcal{X}_n^i = (X_n^i, V_n^i) \xrightarrow{\text{Sélection}} \hat{\mathcal{X}}_n^i = (\hat{X}_n^i, \hat{V}_n^i)$  utilise le noyau

$$G_n(V_n^i) = e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2} (Y_n - H(V_n^i))^2}$$

- C'est une sélection génétique, donc on garde  $(X_n^i, V_n^i)$  avec la probabilité  $G_n(V_n^i)$  et on redistribue sur le paquet avec  $1 - G_n(V_n^i)$  selon

$$\psi_n\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{V_n^j}\right) = \sum_{j=1}^N \frac{G_n(V_n^j)}{\sum_{k=1}^N G_n(V_n^k)} \delta_{V_n^j}$$

- On estime alors les paramètres locaux  $(\mathbb{E}(Z_n | \mathcal{X}_n^{B_n}, \mathcal{Y}_0^n), \mathbb{E}(\varepsilon_n | \mathcal{X}_n^{B_n}, \mathcal{Y}_0^n))$  par des moyennes sur les incréments de vitesses des particules sélectionnées.

# Dynamique de la population.

- Pour chaque particule on calcule la vitesse moyenne locale approchée par

$$\Pi_n^\delta(\hat{V}_n^i)(\hat{X}_n^i) = \frac{\sum_{j=1}^N \hat{V}_n^j G^\delta(\hat{X}_n^i - \hat{X}_n^j)}{\sum_{k=1}^N 1 \cdot G^\delta(\hat{X}_n^i - \hat{X}_n^k)}$$

- L'étape de mutation coïncide avec celle du signal fluide en champ moyen localisé :

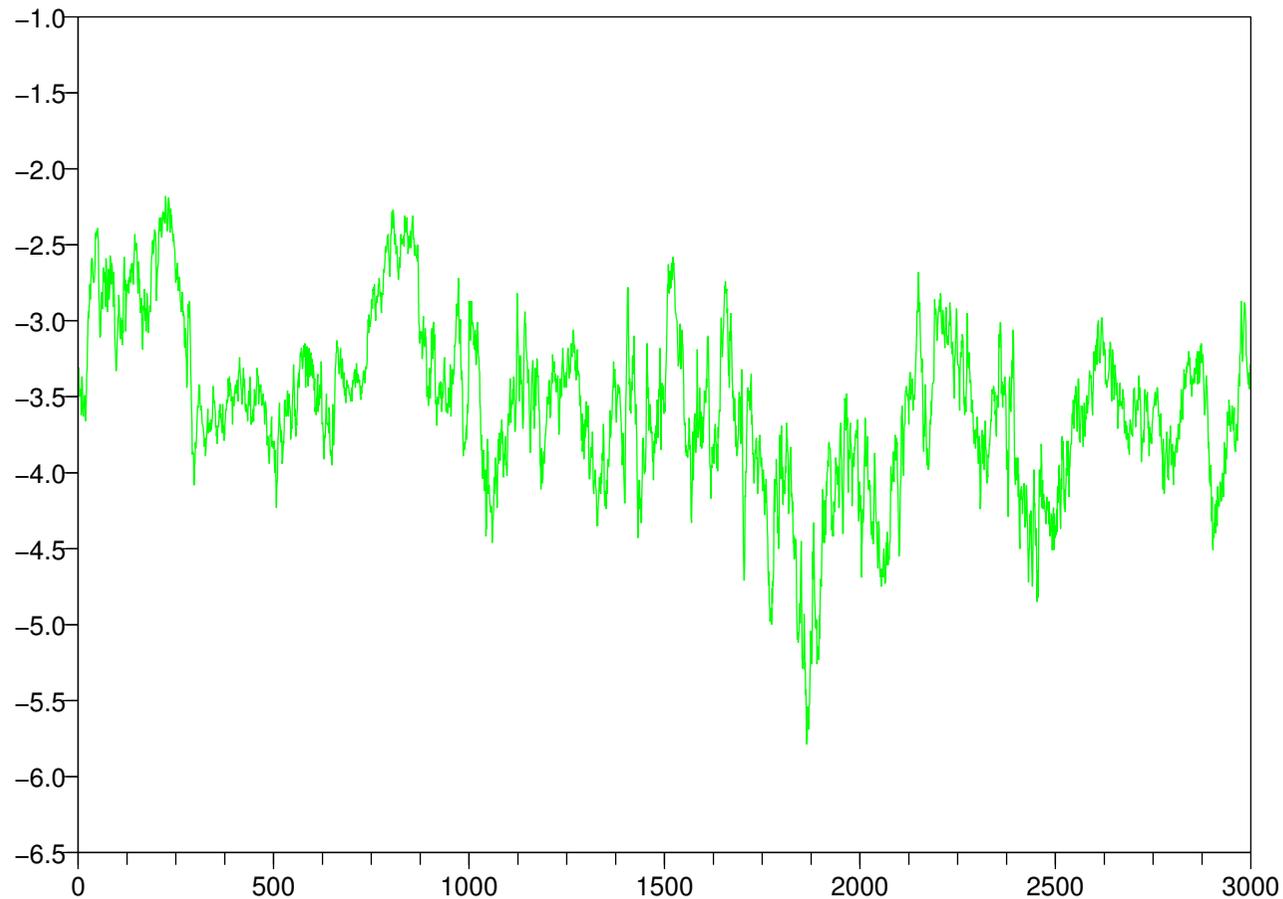
$$\hat{\mathcal{X}}_n^i = (\hat{X}_n^i, \hat{V}_n^i) \xrightarrow{M_{n+1, \hat{\eta}_n^N}} \tilde{\mathcal{X}}_{n+1}^i \xrightarrow{S_{\tilde{\eta}_{n+1}^N}^{B_{n+1}^N}} \mathcal{X}_{n+1}^i = (X_{n+1}^i, V_{n+1}^i)$$

avec  $B_{n+1}^N$  centrée en  $m_{n+1}^N = \int x \eta_{n+1}^N(dx)$

# **Applications à des mesures réelles bruitées artificiellement**

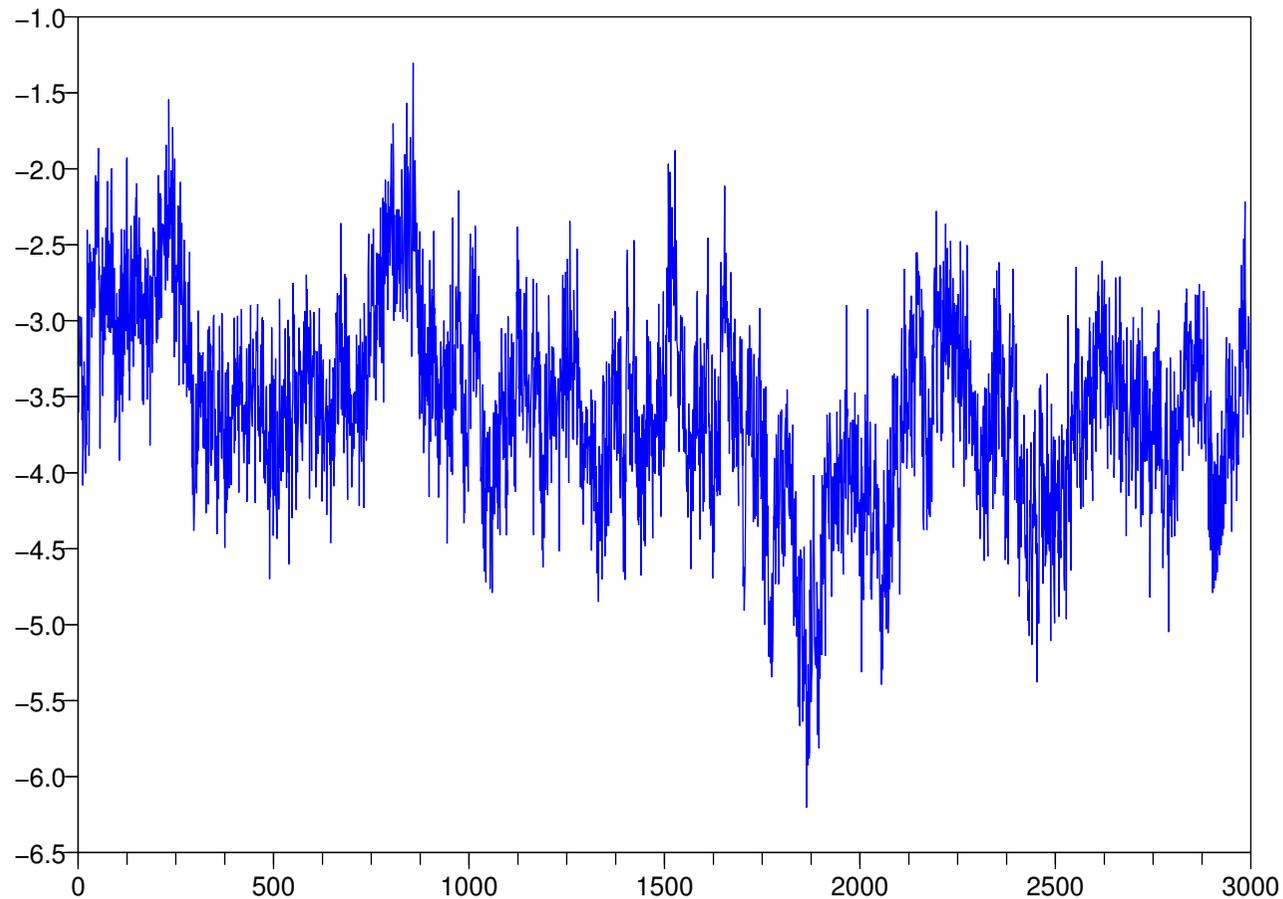
# Applications sur vent réel

Exemple 1- Vent réel échantillonné à 25 Hz avec bruits blancs artificiels.



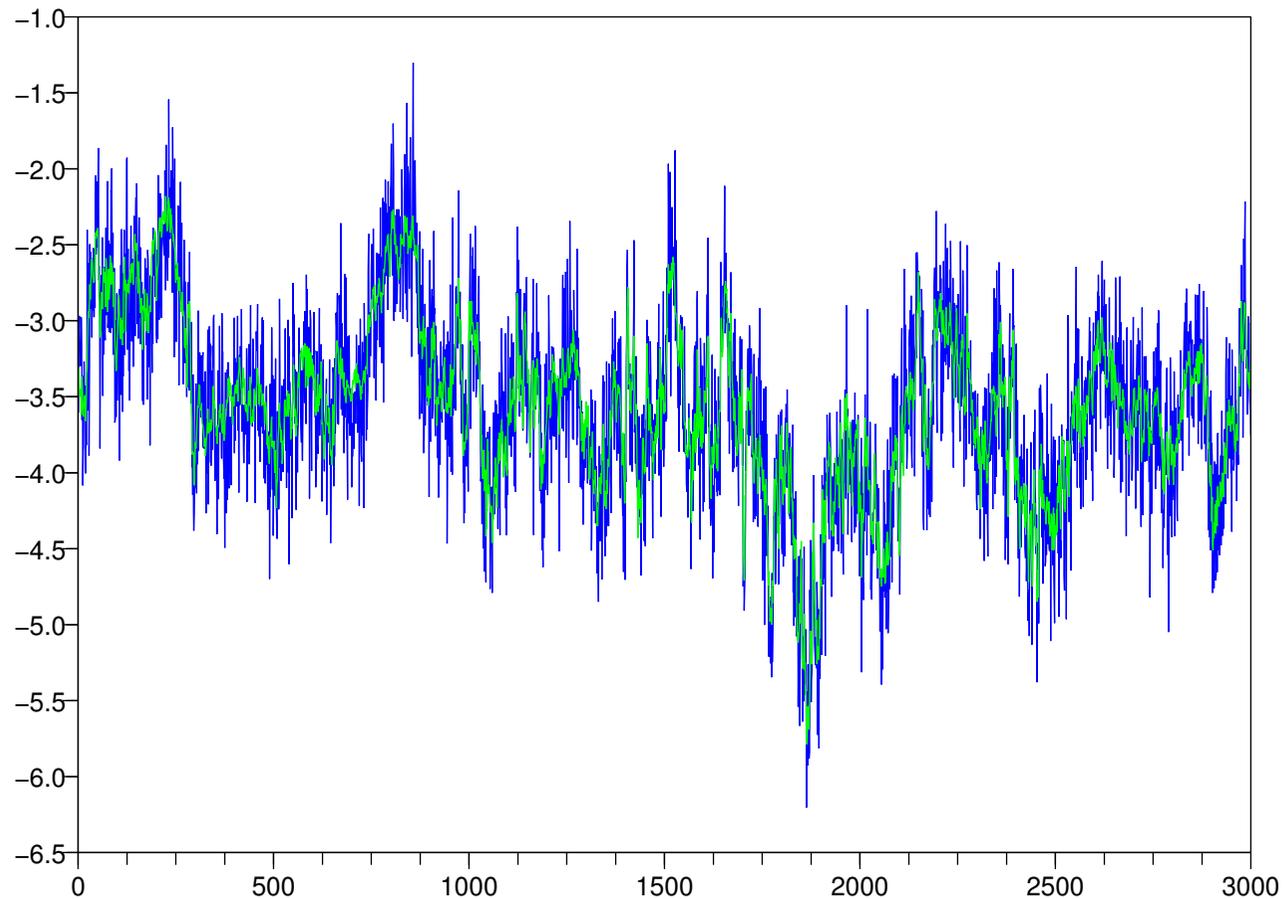
# Applications sur vent réel

Exemple 1- Vent réel échantillonné à 25 Hz avec bruits blancs artificiels.



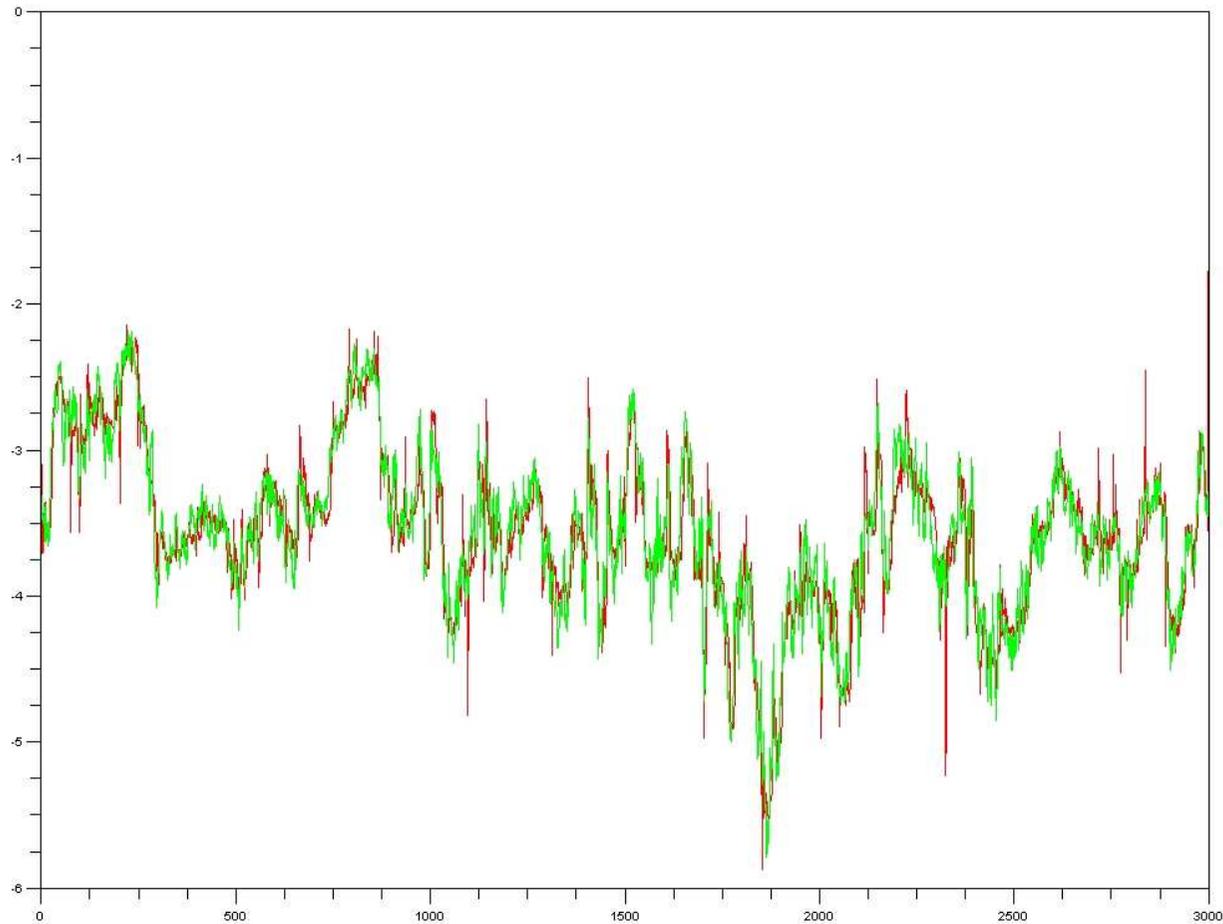
# Applications sur vent réel

Exemple 1- Vent réel échantillonné à 25 Hz avec bruits blancs artificiels.



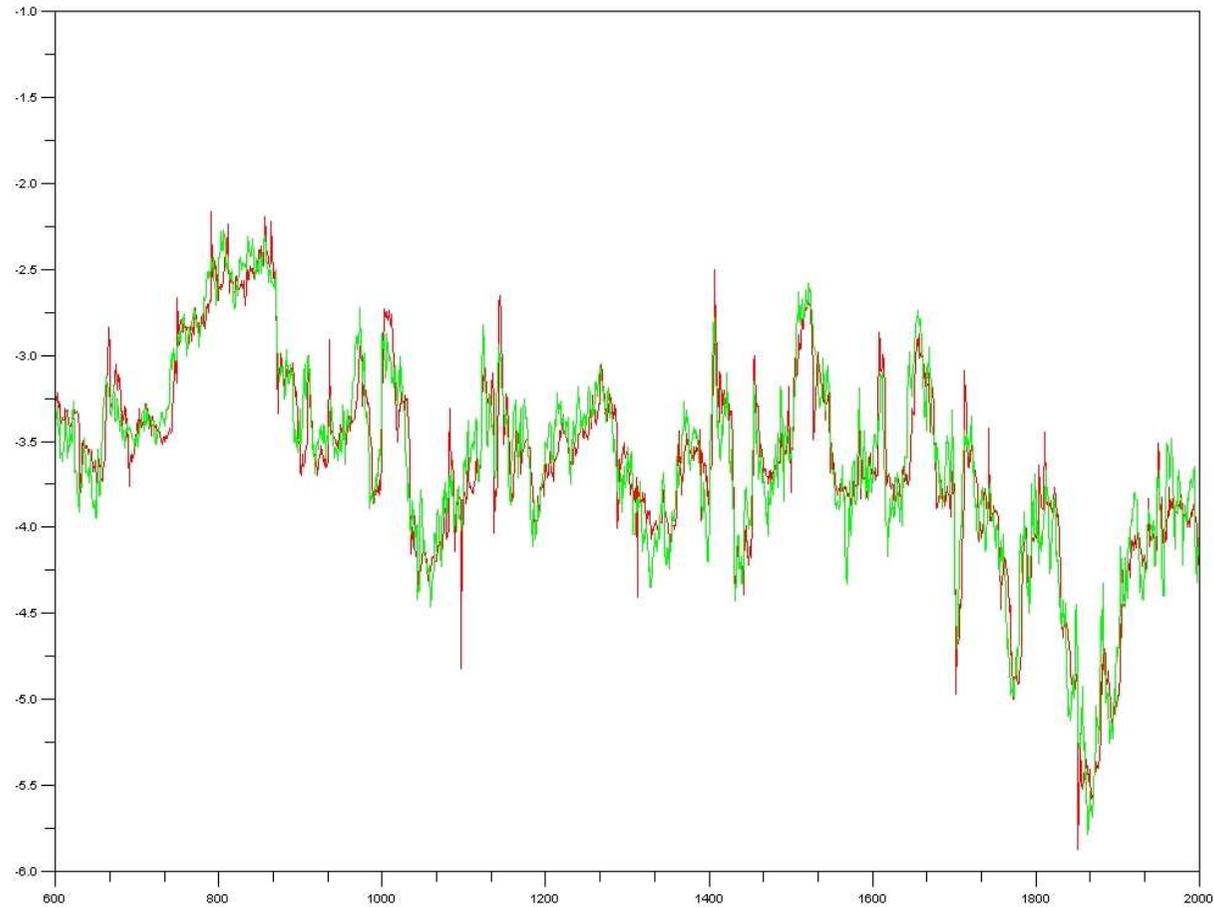
# Applications sur vent réel

Filtrage particulaire avec sélection génétique, 700 particules.



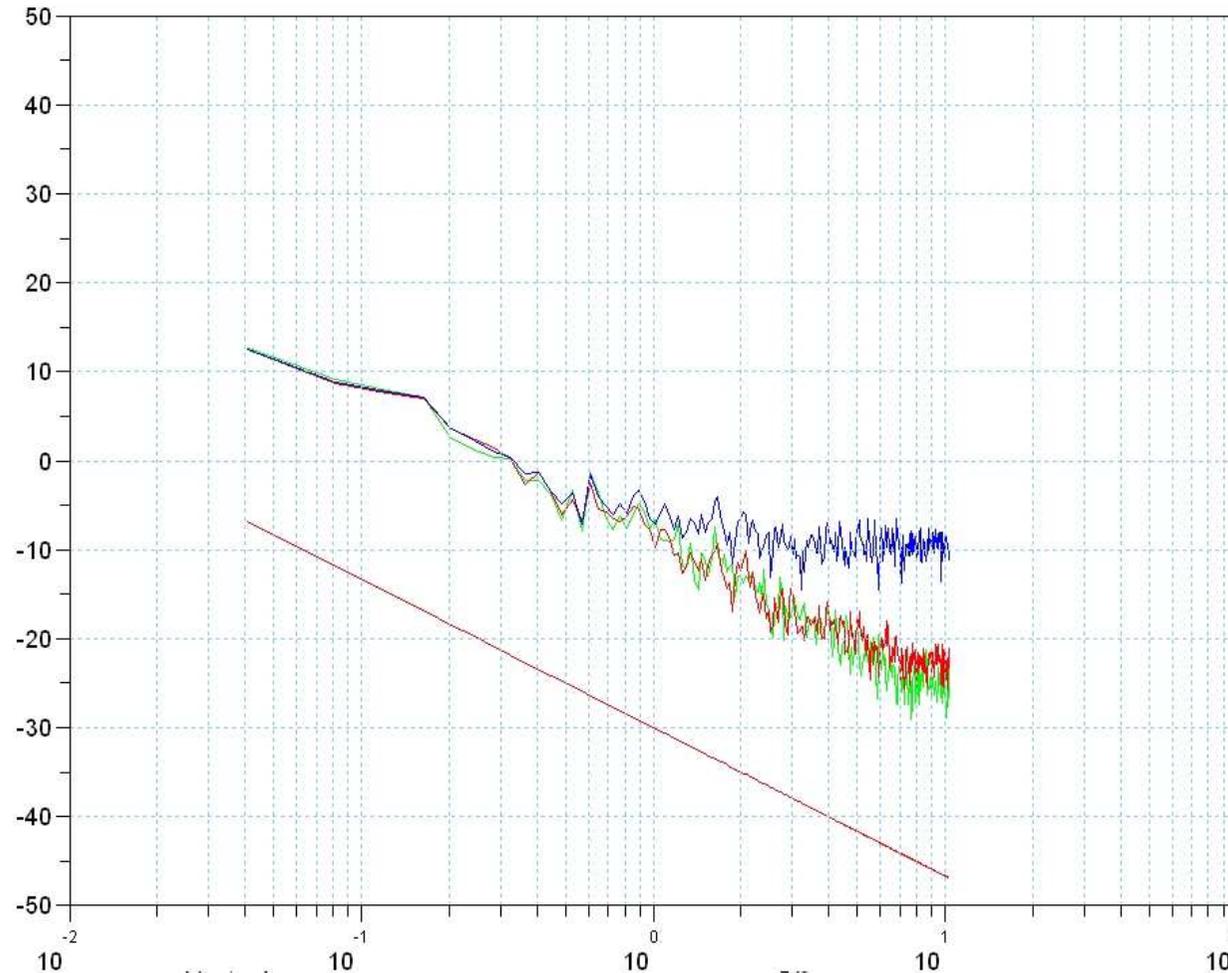
# Applications sur vent réel

Zoom sur le graphique précédent.



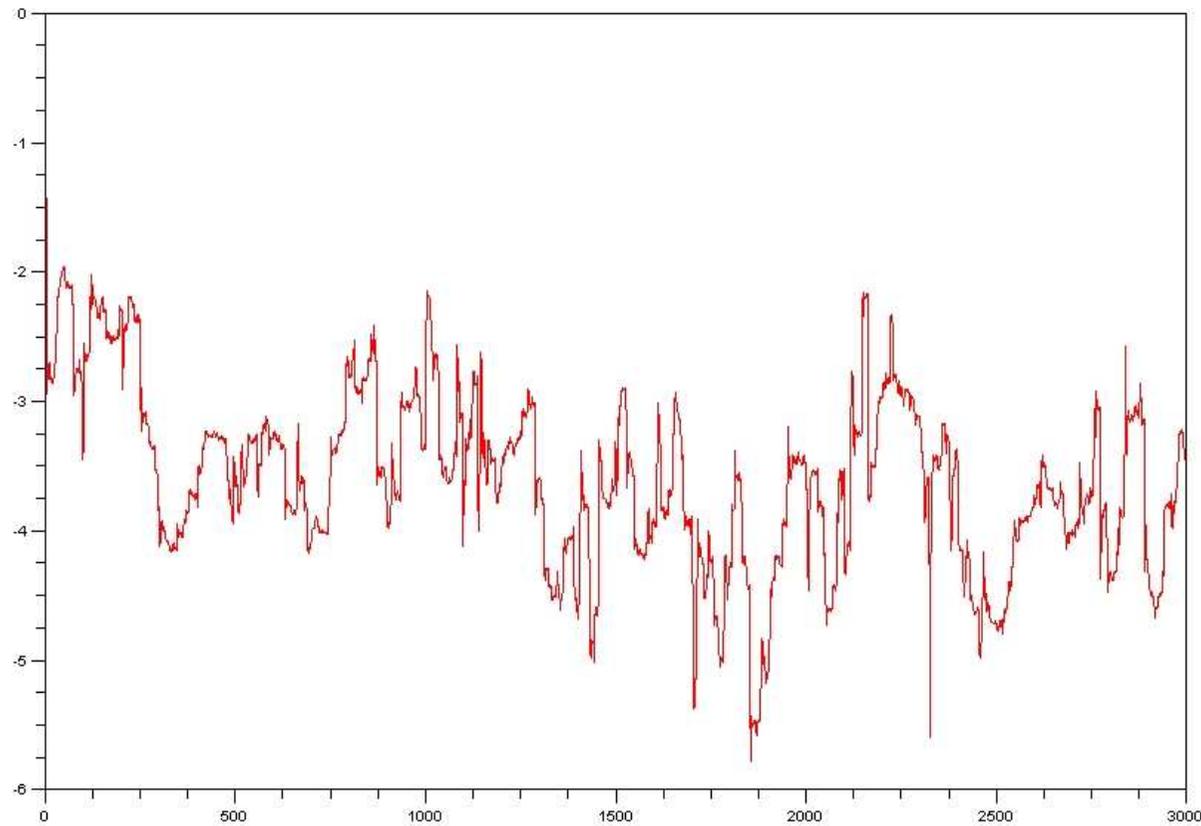
# Applications sur vent réel

Spectres des puissances vent réel, bruité et filtré.



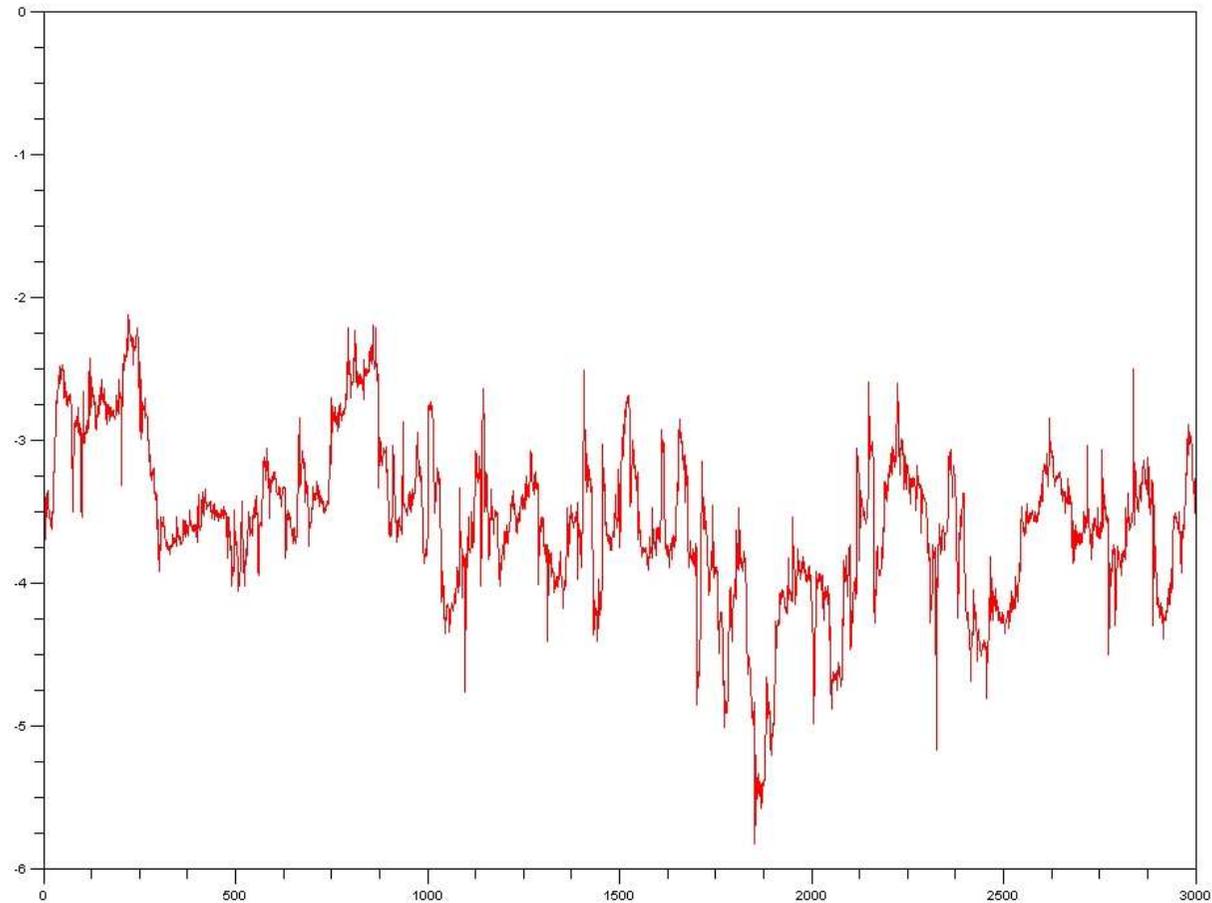
# Applications sur vent réel

Restitution des paramètres déduits du modèle.  
Le gradient de pression moyen local.



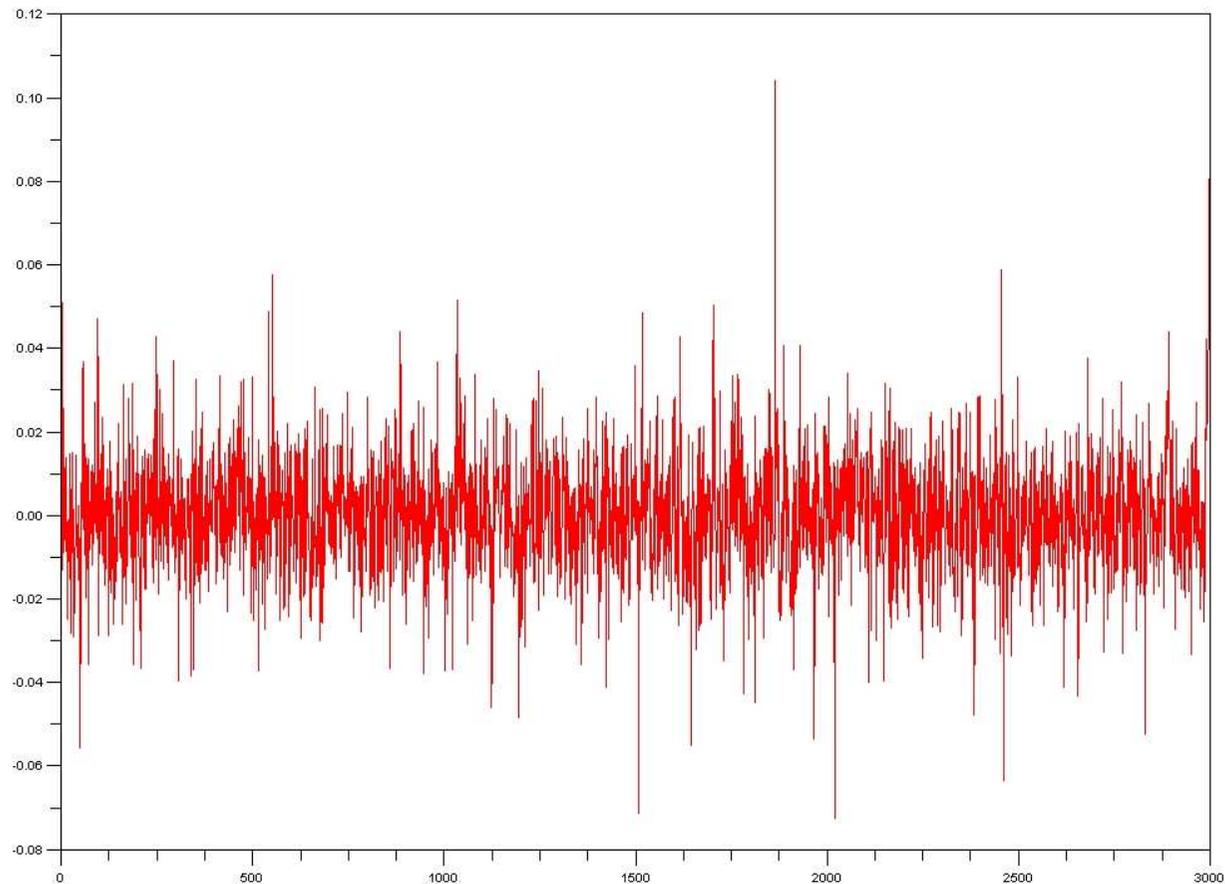
# Applications sur vent réel

Restitution des paramètres déduits du modèle.  
Le vent moyen local.



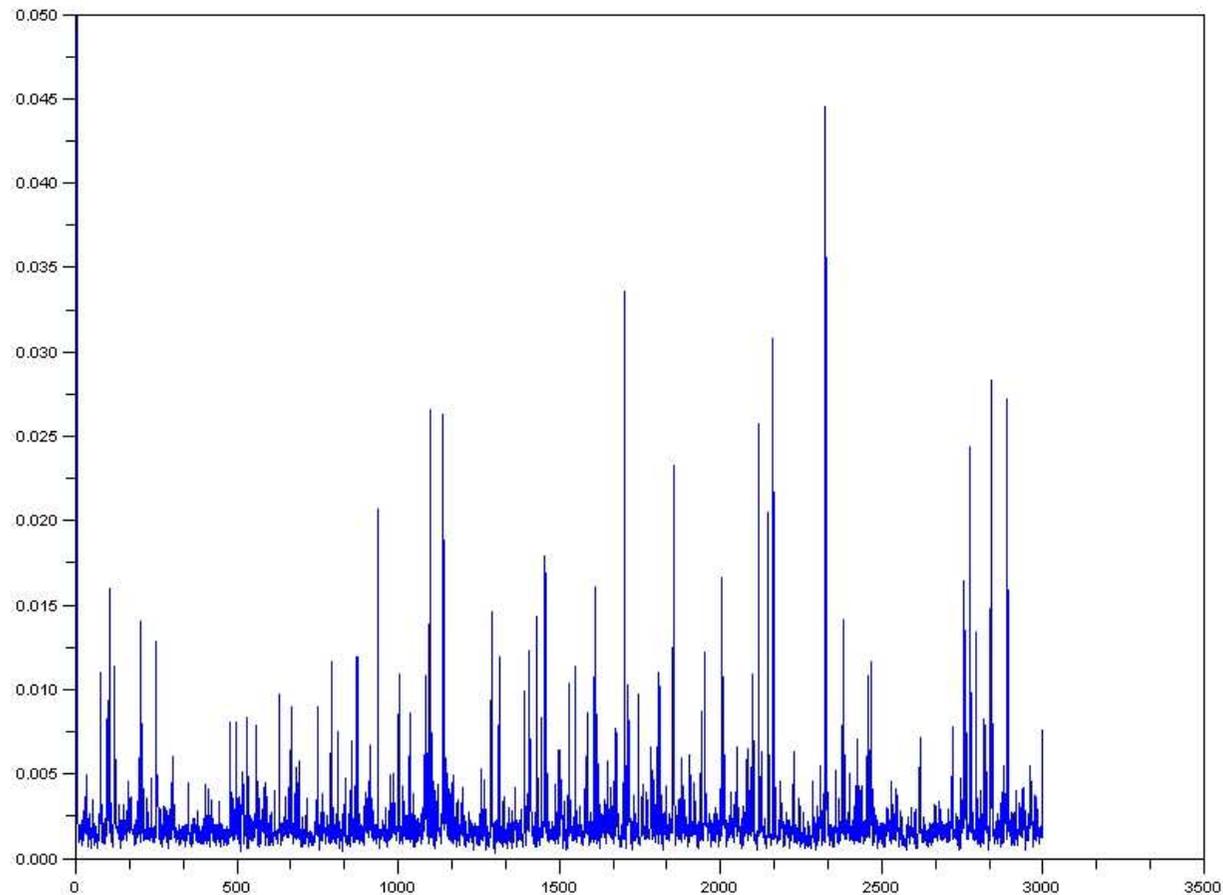
# Applications sur vent réel

Restitution des paramètres déduits du modèle.  
Les fluctuations moyennes locales.



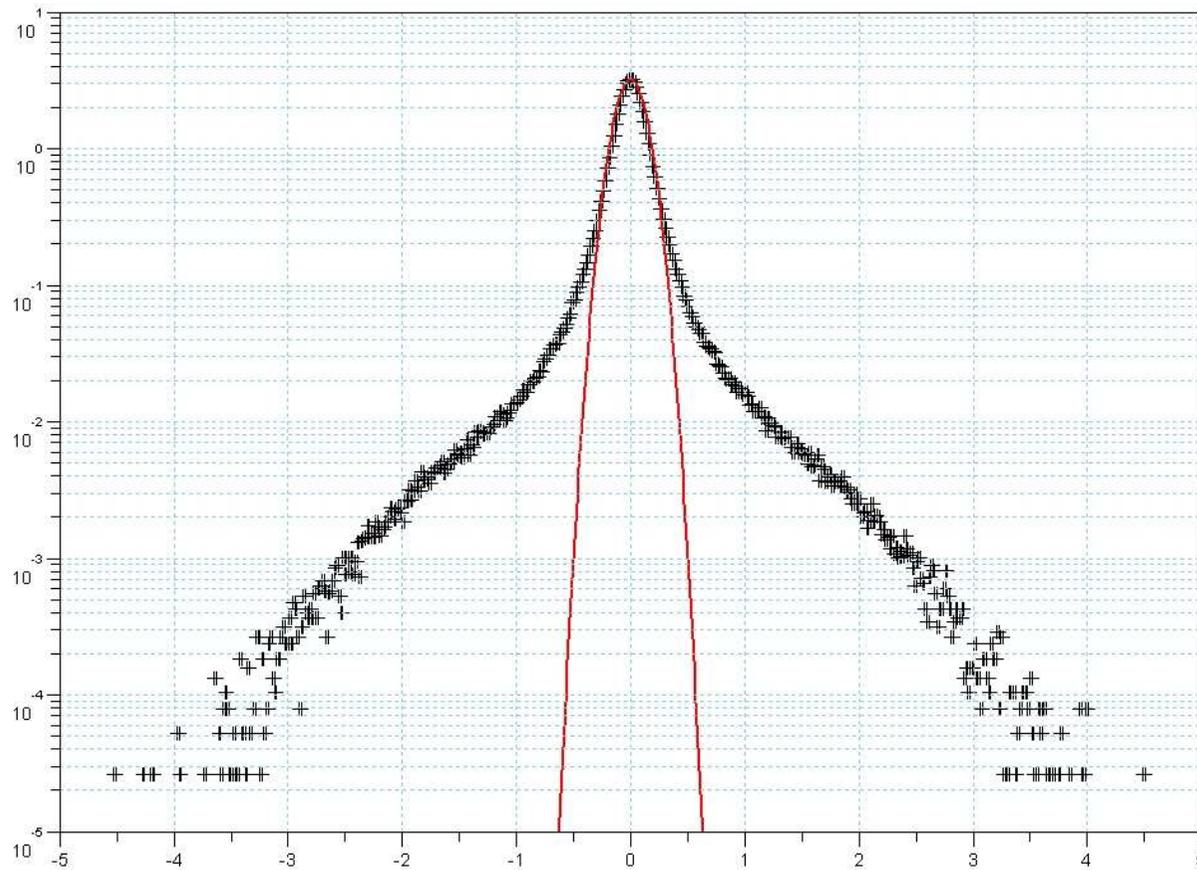
# Applications sur vent réel

Restitution des paramètres déduits du modèle.  
Le taux de dissipation turbulente.



# Applications sur vent réel

Restitution des paramètres déduits du modèle.  
Le log-histogramme des fluctuations.



# Applications sur vent réel

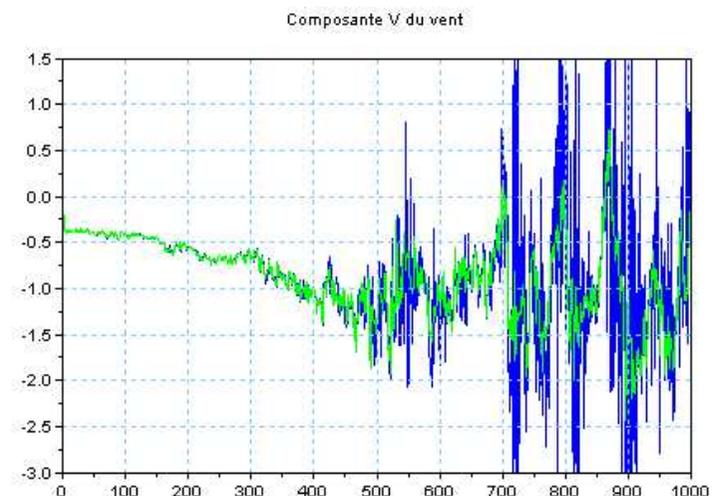
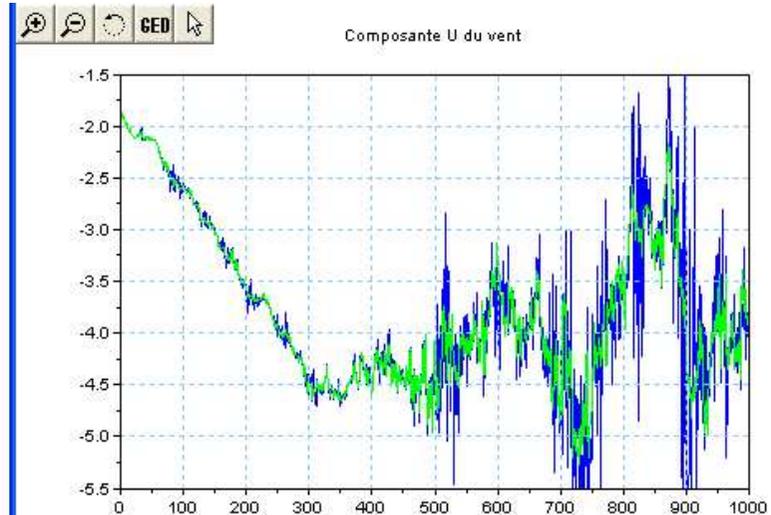
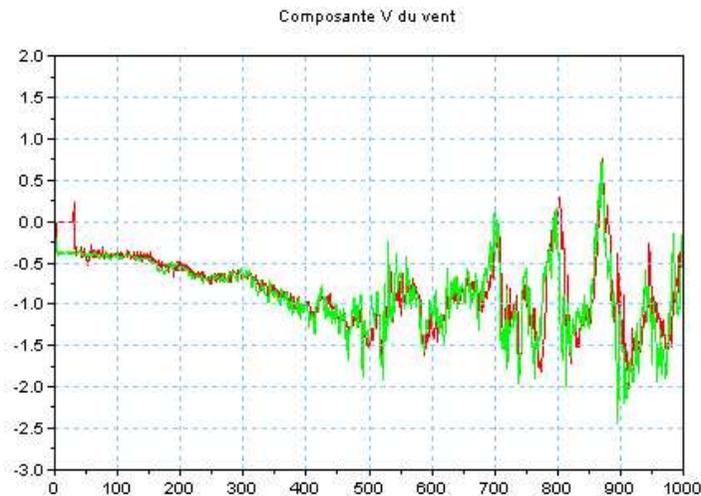
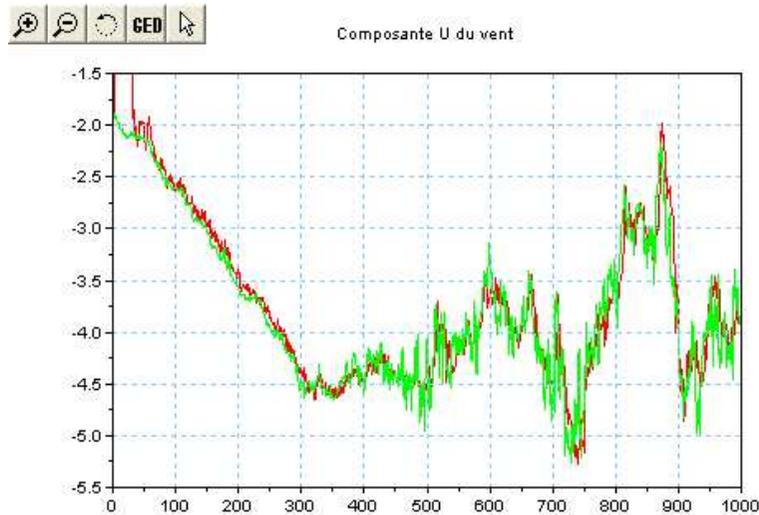
Exemple 2- Vent 2D réel avec bruit gaussien fonction de la variance du signal.

Le bruit est fonction de la turbulence.

Données du 26 Juillet 2006, à 19h20 échantillonnées à 5Hz.

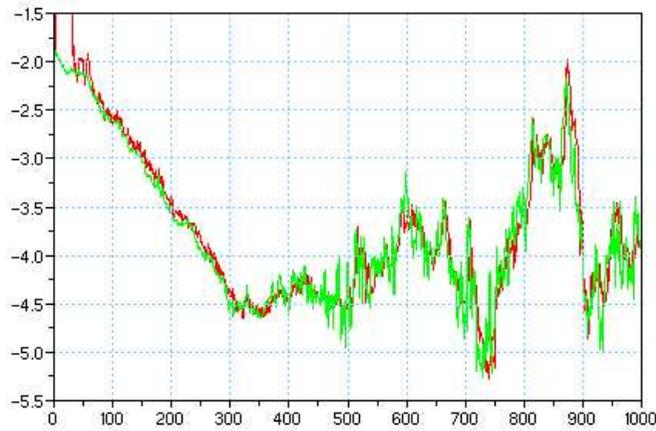
Algorithme particulière utilisant 300 particules.

# Applications sur vent réel

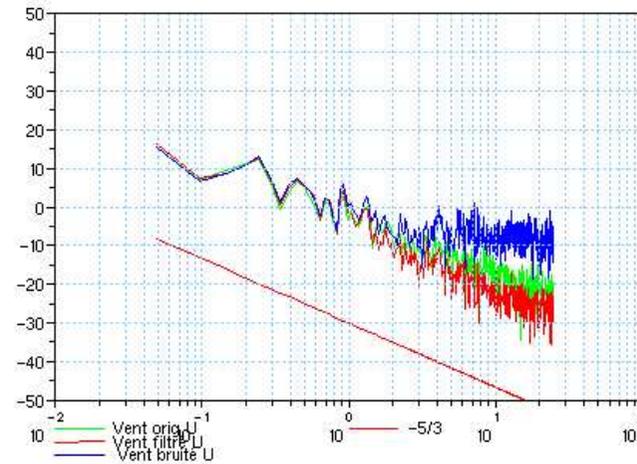


# Applications sur vent réel

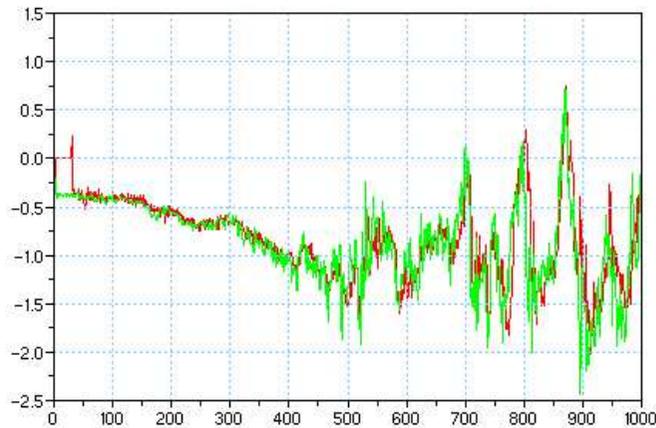
Composante U du vent



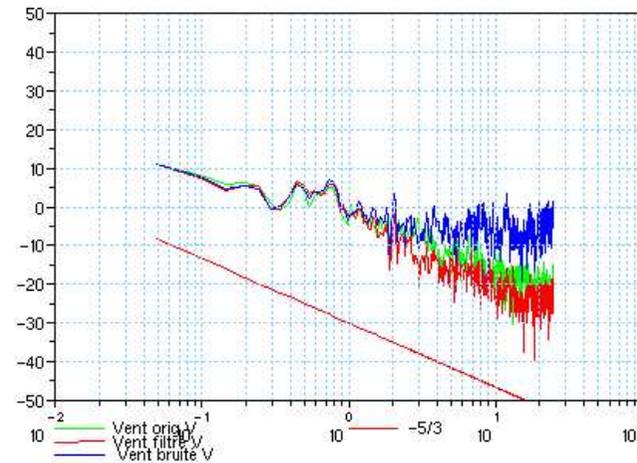
DSP U du vent



Composante V du vent



DSP V du vent



# Et maintenant ...

- La méthode particulière est pertinente pour les vents mesurés au sol.
- Il faut travailler sur les erreurs dans les diverses approximations que l'on a faite.
- On va utiliser un modèle plus réaliste pour la turbulence atmosphérique.
- Une campagne de mesure en cours pour valider l'utilisation du modèle stratifié sur des cas réels.
- Maintenant, on a la méthodologie pour les mesures indirectes aéroportées.

Je vous remercie pour votre attention.

# Annexe.

# Modèle de turbulence stratifié.

## Modèle de Das & Durbin

$$dV_{h,t} = -\nabla_h \bar{p} - \frac{C_1 \varepsilon_t}{2 k_t} (V_{h,t} - \bar{V}_{h,t}) . dt \\ + (C_{2\theta} - 1) . (W_t - \bar{W}_t) . \frac{d\bar{V}_{h,t}}{dz} . dt + (C_0 . \varepsilon_t)^{\frac{1}{2}} dB_t^{V_h}$$

$$dW_t = d\bar{W}_t - \frac{C_1 \varepsilon_t}{2 k_t} (W_t - \bar{W}_t) . dt \\ + (1 - C_{5\theta}) . \beta . g . (\theta_t - \bar{\theta}_t) . dt + (C_0 . \varepsilon_t)^{\frac{1}{2}} dB_t^W$$

$$d\theta_t = d\bar{\theta}_t - \left( C_{1\theta} - \frac{C_1}{2} \right) \frac{\varepsilon_t}{k_t} (\theta_t - \bar{\theta}_t) . dt \\ - (W_t - \bar{W}_t) . \frac{d\bar{\theta}_t}{dz} . dt + (C_\theta)^{\frac{1}{2}} dB_t^\theta$$

# Calcul du terme de Pression.

Le terme de pression peut être calculé par l'équation de Poisson:

$$\Delta \langle p \rangle = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \langle U^i U^j \rangle}{\partial x_i \partial x_j}$$