

# Filtrage par estimation particulaire des mesures de vitesses du fluide atmosphérique turbulent

CFM'07 - Grenoble - Lundi 27 Août 2007

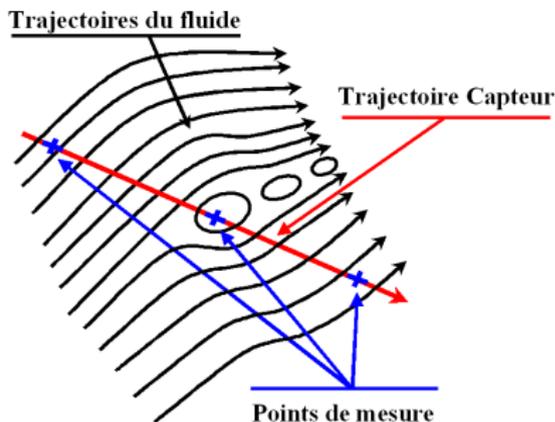
Christophe Baehr

Météo-France / IMT-LSP Univ. Paul Sabatier



# Mesures atmosphériques

- ⊕ En météorologie expérimentale, les plates-formes de mesures sont multiples.
- ⊕ Une nécessité d'avoir des mesures de plus en plus fines et rapides.
- ⊕ On a besoin de :
  - ⊕ Améliorer les systèmes de mesures et d'acquisition.
  - ⊕ Mettre en place un filtrage non-linéaire des signaux.
- ⊕ Difficulté: échantillonnage ponctuel d'un champ multidimensionnel



# Le filtrage stochastique non-linéaire ...

... en 2 transparents

- ⊕ Filtrer c'est estimer: retrouver  $X_n$  à partir de l'observation bruitée  $Y_n$ .
- ⊕ Le bruit est une variable aléatoire, donc il faut calculer  $\mathbb{E}[X_0 \dots X_n | Y_0 \dots Y_n]$ , ou plutôt la *Loi*( $X_0 \dots X_n | Y_0 \dots Y_n$ ).
- ⊕ Le problème de filtrage repose alors sur 2 équations (une sur la dynamique de  $X_n$  et l'autre sur l'observation  $Y_n$ ).
- ⊕ L'estimation de la loi du filtrage repose sur 2 étapes:
  - ⊕ **une prédiction (/mutation)**
  - ⊕ **une correction (/mise à jour/sélection)**
- ⊕ On suppose alors que le vecteur d'état  $X_n$  est Markovien de loi de transition  $M_{n+1}(y, dz) = \mathbb{P}(x_{n+1} \in dz | x_n = y)$  et que l'équation liant  $Y_n$  à  $X_n$  fournit une fonction potentiel  $G_n(X_n) = g(X_n, Y_n)$ .
- ⊕ On définit un noyau de sélection pour une loi  $\eta$  par:

$$S_{n,\eta}(x, dy) = G_n(x)\delta_x(dy) + [1 - G_n(x)]\frac{G_n(y)}{\eta(G_n)}\eta(dy)$$

# Le filtrage stochastique non-linéaire ...

... en 2 transparents

⊕ On définit deux mesures de probabilités, qui seront les lois du filtrage, pour une fonction test mesurable bornée  $f$ :

$$\eta_n(f) = \mathbb{E}[f(X_0 \dots X_n) \mid Y_0 \dots Y_{n-1}]$$

$$\hat{\eta}_n(f) = \mathbb{E}[f(X_0 \dots X_n) \mid Y_0 \dots Y_n]$$

⊕ On suppose que l'équation d'observation est :  
 $Y_n = h(X_n) + \sigma_n^Y \cdot W_n^Y$  où  $h$  est une fonction bornée,  $W_n$  est un processus de Wiener, et  $\sigma_n^Y$  une constante positive.

⊕ Alors la fonction potentiel s'écrit:  $G_n(X_n) = e^{-\frac{[Y_n - h(X_n)]^2}{2 \cdot \sigma_n^Y}}$

⊕ **Le filtrage est un processus séquentiel** et l'on a le schéma d'évolution temporelle:

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{\text{Mise à jour}} & \hat{X}_n & \xrightarrow{\text{Prédiction}} & X_{n+1} \\ \eta_n & \xrightarrow{S_{n, \eta_n}} & \hat{\eta}_n & \xrightarrow{M_{n+1}} & \eta_{n+1} \end{array}$$

⊕ Le problème est résolu par une approximation particulière

## Modèle Euler/Lagrange de Pope discrétisé et adapté pour le problème de filtrage

- ⊕ Ce sont des modèles d'évolution (Lagrangiens) de particules sans inertie, utilisant des moyennes locales (Eulériennes) placés dans la turbulence homogène isotrope.
- ⊕ Basés sur des équations de Langevin, la mise en forme utilise l'équation de Navier-Stokes, et certains termes sont déduits pour respecter les lois de Kolmogorov (K41) pour la turbulence.
- ⊕ Le modèle simplifié s'écrit:

$$dV_t = -\nabla_x \langle p \rangle dt - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} C_0\right) \frac{\varepsilon_t}{k_t} (V_t - \langle v \rangle) dt + \sqrt{C_0 \varepsilon_t} dW_t$$

- ⊕ Ce modèle fait parti d'une classe d'équation de dit de McKean-Vlasov à champ moyen, très étudié en modélisation stochastique.
- ⊕ Nous avons étendu l'étude de ces processus dans le cas du filtrage non-linéaire.
- ⊕ Mais ici, il faut profondément le transformer pour accéder aux quantités Eulériennes uniquement par les observations.

# Modèle Euler/Lagrange de Pope

discrétisé et adapté pour le problème de filtrage

- ⊕ Dans le cas du filtrage on considère le couple markovien  $(X_n, V_n)$  où seule la vitesse est observée.
- ⊕ La moyenne Eulérienne  $\langle \cdot \rangle$  n'est pas bien posée relativement au Markov  $(X_n, V_n)$ .
- ⊕ On l'approche par  $\Pi_n^\delta(\varphi)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}_\delta(\varphi(V_n)|X_n = x) = \frac{\mathbb{F}_n^\delta(\varphi)(x)}{\mathbb{F}_n^\delta(\mathbf{1})(x)}$  avec l'approximation faible  $\mathbb{F}^\delta = \iint \varphi(v) G^\delta(x - z) p^{X_n, V_n}(z, v) dz dv$
- ⊕ Par exemple l'énergie cinétique turbulente s'approche par  $k_n \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_n^\delta[(V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n))^2](X_n)$
- ⊕ Il faut également apprendre des termes comme le gradient de pression ou la dissipation turbulente.
- ⊕ On remarque que  $\mathbb{E}(\Delta V_n) = -\nabla_x \langle p \rangle \Delta t \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(Z_n)$  et  $\mathbb{E}(\varepsilon_n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\Delta V_n \Delta V_n) / (C_0 \Delta t)$

# Modèle Euler/Lagrange de Pope

discrétisé et adapté pour le problème de filtrage

⊕ Les espérances sont conditionnées aux observations et calculées par méthode de Monte-Carlo sur l'ensemble de particules servant au filtrage.

⊕ Ainsi si  $(X_n^i, V_n^i)_{1 \leq i \leq N}$  sont les particules à l'instant  $n$ , alors

$$\Pi_n^\delta(\varphi)(X_n^i) \approx \Pi_n^{\delta, N}(\varphi)(X_n^i) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varphi(V_n^j) G^\delta(X_n^i - X_n^j)}{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N 1 \cdot G^\delta(X_n^i - X_n^k)}$$

⊕ Le modèle de Pope discrétisé, conditionné aux observations s'écrit alors

$$\begin{cases} X_{n+1} &= X_n + V_n \Delta t + \sigma_n^X \Delta B_n^X \\ V_{n+1} &= V_n + \mathbb{E}(Z_n | Y_0 \dots Y_n) \\ &- C_1 \frac{\mathbb{E}(\varepsilon_n | Y_0 \dots Y_n)}{k_n} [V_n - \Pi_n^\delta(V_n)(X_n^i)] \Delta t \\ &+ \sqrt{C_0 \mathbb{E}(\varepsilon_n | Y_0 \dots Y_n)} \Delta B_n^V \end{cases}$$

⊕ Et l'équation d'observation :  $Y_n = h(V_n) + \sigma^Y W_n^Y$

# Filtrage Conditionnel

pour un fluide observé

- ⊕ On utilise un algorithme particulière pour estimer les paramètres du fluide.

Filtre optimal = ( Prédiction / Correction )



Filtre particulière = ( Mutation / Sélection )

- ⊕ L'étape de Sélection est cruciale, c'est elle qui apprend le fluide.
- ⊕ La prédiction utilise les paramètres appris, elle est donc conditionnée aux observations.
- ⊕ La convergence de l'ensemble est assurée sur les arbres généalogiques

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\text{lignes ancestrales}^{(i)}} \stackrel{N \rightarrow \infty}{\sim} \mathcal{Loi}(\mathcal{X}_0, \dots, \mathcal{X}_n | \mathcal{Y}_0, \dots, \mathcal{Y}_n)$$

(cf P. Del Moral *Feynman-Kac Formulæ, Genealogical and Interacting Particle Systems*, Springer 2004)

- ⊕ Il est nécessaire d'ajouter une localisation des particules.

# Filtrage Conditionnel

## La localisation

- ⊖ On définit, pour tout temps  $n$ , une boule  
 $B_n = \{(x, v) : d(x, m_n) \leq R\}$  où  $m_n = \int x \eta_n(dx)$
- ⊖ On localise alors le filtrage de fluide dans des régions  $B_n$

$$\mathcal{X}_n^B \in B_n \xrightarrow{M_{n+1, \hat{\eta}_n^B}} \mathcal{X}_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{X}_{n+1}, V_{n+1}) \xrightarrow{S_{\eta_{n+1}^B}} \mathcal{X}_{n+1}^B \in B_{n+1}$$

en définissant le noyau de localisation :

$$S_{\eta}^B(x, dy) = \mathbb{1}_B(x) \delta_x(dy) + \mathbb{1}_{B^c}(x) \frac{\mathbb{1}_B(y) \eta(dy)}{\eta(B)}$$

et les lois du filtrage localisées :

$$\hat{\eta}_n^B = \mathcal{L}oi(\mathcal{X}_n | \mathcal{X}_0 \in B_0, \dots, \mathcal{X}_n \in B_n, \mathcal{Y}_0^n)$$

$$\eta_{n+1} = \mathcal{L}oi(\mathcal{X}_{n+1} | \mathcal{X}_0 \in B_0, \dots, \mathcal{X}_n \in B_n, \mathcal{Y}_0^n) = \hat{\eta}_n^B M_{n+1, \hat{\eta}_n^B}$$

# Filtrage Conditionnel

## L'algorithme

- ⊖ L'étape de sélection  $\mathcal{X}_n^i = (X_n^i, V_n^i) \xrightarrow{\text{Sélection}} \hat{\mathcal{X}}_n^i = (\hat{X}_n^i, \hat{V}_n^i)$  utilise le noyau  $G_n(V_n^i) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2} [Y_n - h(V_n^i)]^2}$  on garde  $(X_n^i, V_n^i)$  avec la probabilité  $G_n(V_n^i)$  et on redistribue sur le paquet avec  $1 - G_n(V_n^i)$  selon la mesure empirique  $\sum_{j=1}^N \frac{G_n(V_n^j)}{\sum_{k=1}^N G_n(V_n^k)} \delta_{V_n^j}$
- ⊖ On estime alors les paramètres locaux  $\mathbb{E}(Z_n | \mathcal{X}_n^{B_n}, \mathcal{Y}_0^n)$ ,  $\mathbb{E}(\varepsilon_n | \mathcal{X}_n^{B_n}, \mathcal{Y}_0^n)$  par des moyennes sur les incréments de vitesses des particules sélectionnées.
- ⊖ L'étape de mutation coïncide avec celle du signal fluide en champ moyen localisé :

$$\hat{\mathcal{X}}_n^i = (\hat{X}_n^i, \hat{V}_n^i) \xrightarrow{M_{n+1}, \hat{\eta}_n^N} \tilde{\mathcal{X}}_{n+1}^i \xrightarrow{S_{\hat{\eta}_{n+1}^N}^{B_{n+1}^N}} \mathcal{X}_{n+1}^i = (X_{n+1}^i, V_{n+1}^i)$$

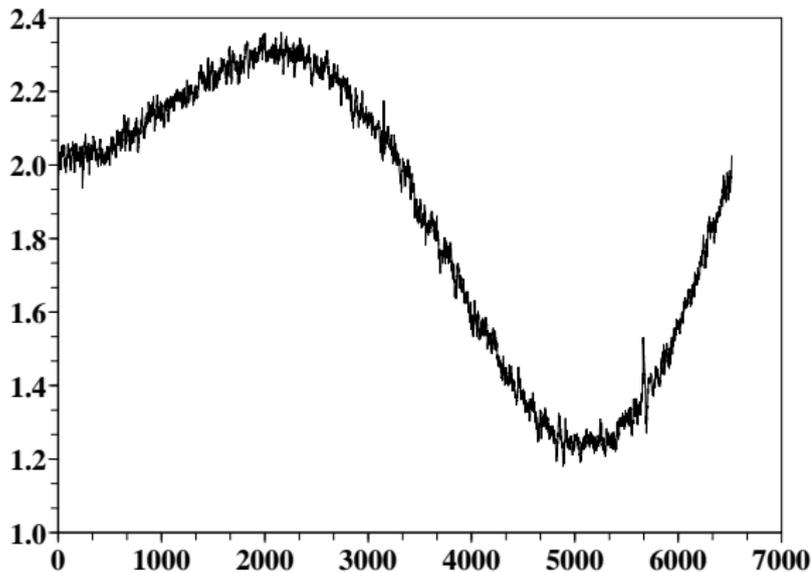
avec  $B_{n+1}^N$  centrée en  $m_{n+1}^N = \int x \eta_{n+1}^N(dx)$

Applications:  
Vent simulé 1D  
Vent réel 1D à 3D

# Application du Filtrage Particulaire

## Cas d'un vent 1D simulé

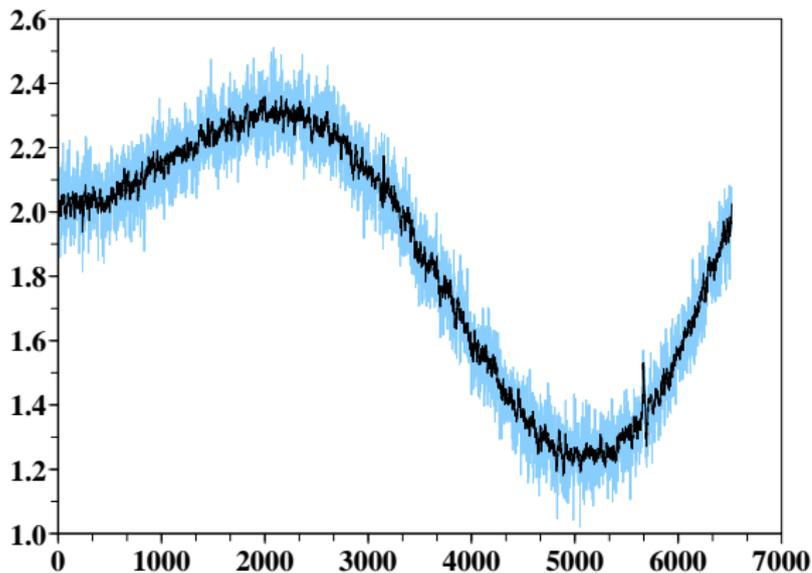
On construit un vent 1D simulé en utilisant le modèle de Pope discrétisé et une modélisation particulaire.



# Application du Filtrage Particulaire

## Cas d'un vent 1D simulé

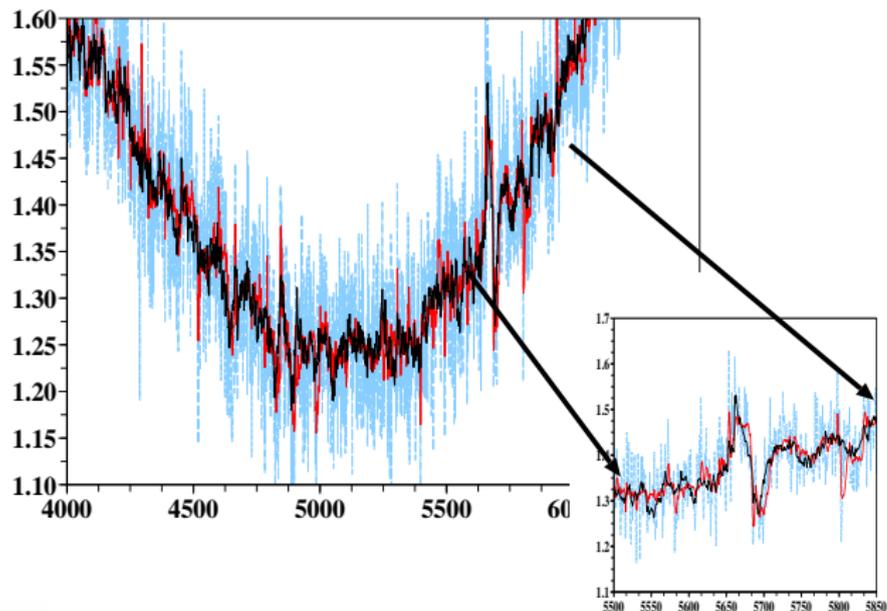
On rajoute un bruit blanc artificiel au signal construit. C'est au travers de ce signal bruité que l'on va chercher à estimer le vent.



# Application du Filtrage Particulaire

## Cas d'un vent 1D simulé

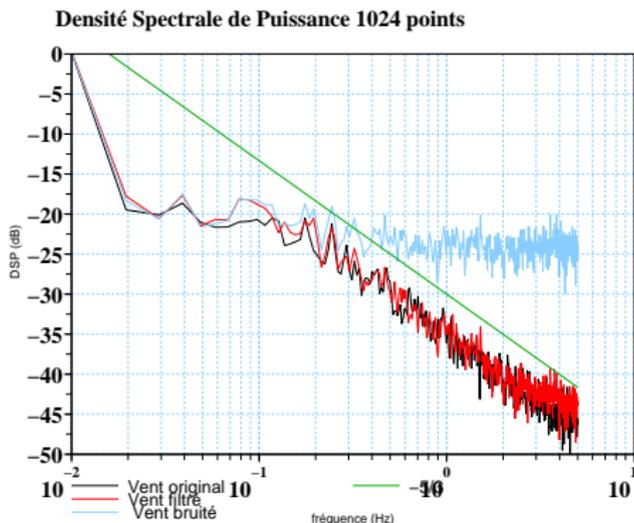
Le filtre particulaire nous restitue des estimés en rouge que l'on compare à la réalité en noir.



# Application du Filtrage Particulaire

## Cas d'un vent 1D simulé

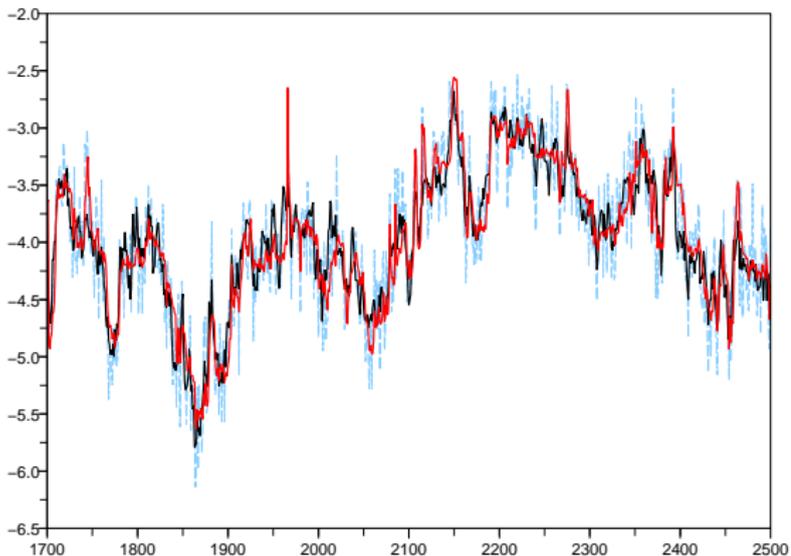
On peut vérifier sur les spectres de puissance la qualité des signaux filtrés.



# Application du Filtrage Particulaire

## Cas d'un vent 1D réel bruité artificiellement

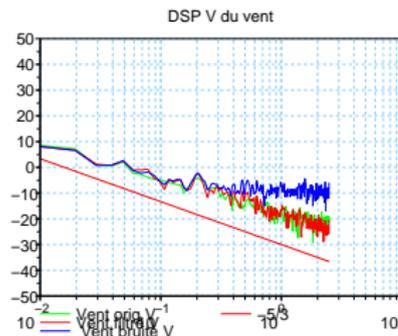
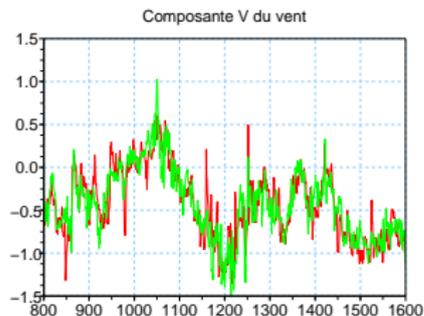
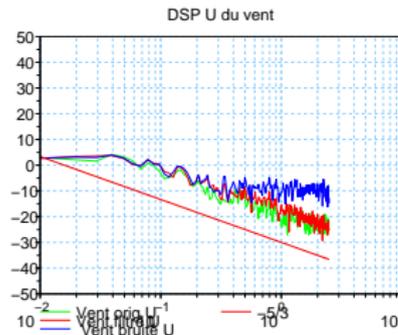
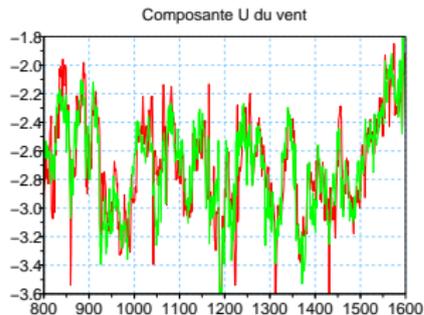
On a également testé le filtrage de mesures réelles bruitées artificiellement, d'abord en 1D.



# Application du Filtrage Particulaire

## Cas d'un vent 2D réel bruité artificiellement

Puis toujours avec des données réelles et des bruits artificiels sur des mesures bidimensionnelles.



# Application du Filtrage Particulaire

## Cas d'un vent 3D réel bruité artificiellement

- ⊕ Pour passer en 3D il a fallu changer de modèle pour correspondre à un fluide géophysique.
- ⊕ C'est le modèle proposé par Das et Durbin pour la turbulence stratifiée que l'on a modifié ainsi:

$$dV_{h,t} = -\nabla_h \bar{p} - \frac{C_1}{2} \frac{\varepsilon_t}{k_t} (V_{h,t} - \bar{V}_{h,t}) \cdot dt \\ + (C_{2\theta} - 1) \cdot (W_t - \bar{W}_t) \cdot \frac{d\bar{V}_{h,t}}{dz} \cdot dt + (C_0 \cdot \varepsilon_t)^{\frac{1}{2}} dB_t^{V_h}$$

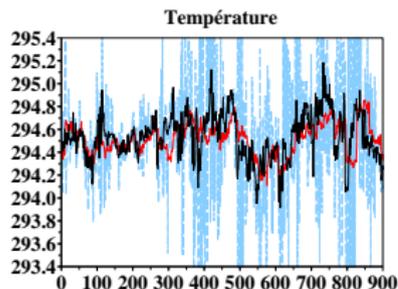
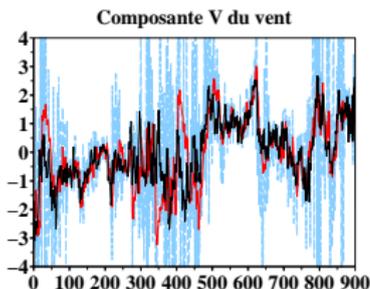
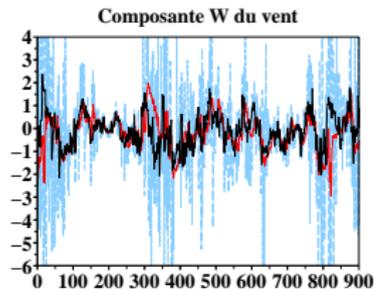
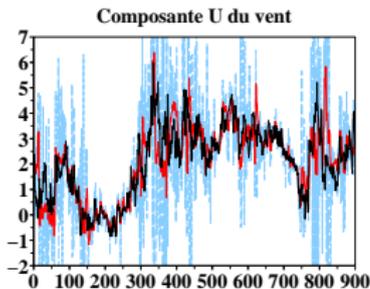
$$dW_t = d\bar{W}_t - \frac{C_1}{2} \frac{\varepsilon_t}{k_t} (W_t - \bar{W}_t) \cdot dt \\ + (1 - C_{5\theta}) \cdot \beta \cdot g \cdot (\theta_t - \bar{\theta}_t) \cdot dt + (C_0 \cdot \varepsilon_t)^{\frac{1}{2}} dB_t^W$$

$$d\theta_t = d\bar{\theta}_t - \left(C_{1\theta} - \frac{C_1}{2}\right) \frac{\varepsilon_t}{k_t} (\theta_t - \bar{\theta}_t) \cdot dt \\ - (W_t - \bar{W}_t) \cdot \frac{d\bar{\theta}_t}{dz} \cdot dt + (C_\theta)^{\frac{1}{2}} dB_t^\theta$$

# Application du Filtrage Particulaire

## Cas d'un vent 3D réel bruité artificiellement

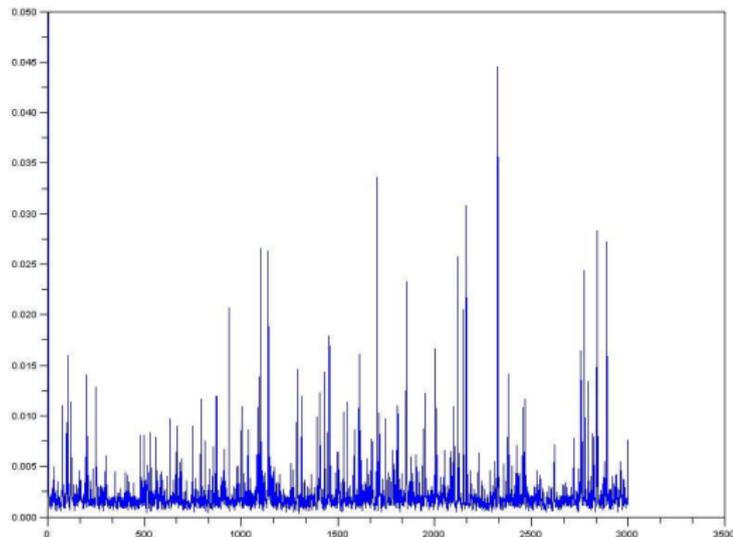
Nous avons filtré des mesures réelles ( 3D + Température ) bruitées artificiellement.



# Application du Filtrage Particulaire

## Cas d'un vent 3D réel bruité artificiellement

Par l'utilisation du modèle, le filtrage permet également une estimation haute cadence des paramètres caractéristiques de la turbulence (taux de dissipation, gradients verticaux, coefficients de flottabilité,...).



## Quelques Perspectives ....

- ⊕ Des vérifications multiples sont en cours pour valider la méthode.
- ⊕ Le passage a des mesures mobiles, le problème de filtrage devra être formulé pour tenir compte des croisements de trajectoires. Une campagne de mesure est programmée.
- ⊕ L'utilisation de la méthode sur des données naturellement bruités. On va tester la méthode sur des données LIDAR qui seront comparées à des mesures d'anémomètres Ultrasonique. On testera alors la validité des estimations rapides des taux de dissipation.
- ⊕ Alors on aura les moyens de définir de nouveaux systèmes de mesures intégrées embarqués dédiés aux paramètres turbulents.
- ⊕ L'algorithme de filtrage que nous avons développé est original. Nous avons commencé à caractériser mathématiquement ses limites théoriques mais il reste du travail .....