

## Filtrage par estimation particulaire des mesures de vitesses du fluide atmosphérique turbulent

Christophe Baehr

Météo-France  
CNRM-GMEI  
42 Avenue de Coriolis 31057 Toulouse Cedex 1  
christophe.baehr@meteo.fr

### Résumé :

*Les vitesses lagrangiennes d'un fluide turbulent peuvent être modélisées par les équations de S.B. Pope qui sont du type McKean-Vlasov à champ moyen. Pour filtrer des mesures de vitesses, nous avons développé un algorithme d'estimation particulaire de type génétique avec une étape de transition utilisant des calculs faits sur le paquet de particules pour estimer les grandeurs eulériennes. Conditionnant le noyau d'évolution markovien aux observations, nous obtenons les fermetures du modèle qui permettent de débruiter les mesures de vitesses d'un fluide turbulent. On présente alors deux applications de la méthode en utilisant des mesures 1D d'abord simulées et bruitées artificiellement, puis avec des données réelles en dimension 3 et un modèle de turbulence stratifié. La technique permet alors d'obtenir l'estimation haute cadence de quantités caractérisant la turbulence.*

### Abstract :

*Fluid Lagrangian velocities can be modelised by S.B. Pope equations which are mean field McKean-Vlasov type. To filter velocities measurements, we've developed a genetic type particle algorithm, with a transition step using computation on the particle set to estimate eulerian values. Conditioning the markovian kernel to observations, we obtain the closure of the model which allow to denoise turbulent fluid velocities measurements. We present two applications first using simulated 1D measurements with artificial noises, and then with real data in 3D flow and a stratified model of turbulence. Furthermore, the method enables high frequency estimations of turbulent quantities.*

### Mots-clefs :

**Turbulence, Filtrage stochastique, méthode Monte-Carlo**

### 1 Introduction

La mesure des vitesses d'un fluide turbulent dans un dispositif expérimental, ou dans le milieu naturel pose le problème de la séparation des bruits de mesures du signal physique effectif. Cet article va présenter la méthode que nous avons développé, permettant de débruiter les observations de la vitesse d'un fluide dans le domaine inertiel à l'aide d'un algorithme d'estimation particulaire stochastique qui est une méthode du type Monte-Carlo fournissant une solution au problème de filtrage non-linéaire. Nous allons montrer comment un modèle de turbulence lagrangien (modèle de Pope simplifié pour la turbulence homogène isotrope), va être transformé pour servir de modèle de comportement au système de filtrage particulaire notamment en le conditionnant aux observations. Grâce à ce conditionnement, les fermetures du système sont obtenues en calculant les grandeurs nécessaires sur l'ensemble des particules. Cela permet aussi de réduire les temps de calcul par rapport à la méthode classique utilisée dans le filtrage des dynamiques à champs moyen. Ce travail s'accompagne d'applications sur des mesures simulées ou réelles, et nous montrerons l'utilisation de ce filtrage pour débruiter des vitesses de vents simulées artificiellement perturbées. On terminera par le cas d'un écoulement atmosphérique

tridimensionnel qui nous amène à utiliser un modèle de turbulence stratifiée écrit pour un fluide pesant.

## 2 Modèle de Pope discrétisé

Pour modéliser le comportement de particules sans inertie placées dans un fluide turbulent (problèmes posés par les combustions), S.B. Pope a développé (voir Pope (2000)) une classe de modèle lagrangien utilisant les grandeurs eulériennes du fluide. Ces modèles reposent sur une équation de Langevin et l'expression d'un temps Lagrangien  $T_L$  compatibles à la fois avec l'équation eulérienne de Navier-Stokes et les lois statistiques de Kolmogorov (exprimées dans K41) pour la turbulence localement homogène. Ces équations pour le cas de la turbulence isotrope en écoulement incompressible se réduisent à :

$$dV_t = -\nabla_x \langle p \rangle dt - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}C_0\right) \frac{\varepsilon_t}{k_t} (V_t - \langle v \rangle) dt + \sqrt{C_0 \varepsilon_t} dB_t$$

où les quantités  $\langle \cdot \rangle$  sont les moyennes eulériennes du paramètre,  $V_t$  est la vitesse lagrangienne,  $\nabla_x \langle p \rangle$  le gradient spatial de pression moyenne,  $k_t$  l'énergie cinétique turbulente moyenne,  $\varepsilon_t$  le taux moyen de dissipation turbulente,  $B_t$  est un processus de Wiener et  $C_0$  la constante de Kolmogorov.

Ce type de modèle fait partie de la classe des équations de McKean-Vlasov qui a largement été étudié par exemple par S. Méléard (1996) et A.S. Sznitman (1991), on a alors l'existence et l'unicité des solutions en trajectoire et en loi, ainsi, on dispose d'estimé des erreurs de l'approximation particulaire, de la convergence de schémas de discrétisation, et de l'assurance du comportement d'un système fini de particules comme étant proche de celui d'un système de taille infinie (propriété de propagation du chaos).

Si l'écoulement du fluide se fait de façon continue, les observations qui en sont faites sont discrètes tout comme le filtre numérique que l'on va présenter. Le filtre stochastique utilise un ensemble de particules test dont la dynamique est celle du fluide, que l'on duplique ou élimine en fonction de la pertinence de leur caractéristique relativement aux observations qui sont faites. Le filtre ne connaît que ses particules et ne dispose pas d'information sur l'écoulement eulérien, ou sur les géométries du flot. La discrétisation des équations de Pope utilise un simple schéma d'Euler explicite et  $V_n$  est la vitesse discrétisée avec un pas de temps  $\Delta t$ . Mais nous avons une difficulté avec les grandeurs eulériennes qui ne sont pas connus, et que l'on doit approcher au moyen de l'espérance lagrangienne conditionné par la position  $x$ , i-e pour un paramètre  $Q(V_n)$  fonction de la vitesse  $V_n$ ,  $\langle Q \rangle \sim \mathbb{E}^\delta(Q(V_n)|X_n = x)$ , où est utilisé un noyau de régularisation  $G^\delta$ . La régularisation est rendue nécessaire par l'utilisation de la loi conjointe du couple  $(X_n, V_n)$  simulée par le système particulaire. Les intégrales  $\mathbb{E}^\delta$  sont alors calculées par des moyennes empiriques sur l'ensemble des particules. Le gradient de pression peut être approché par l'espérance de l'incrément de vitesse  $\Delta V_n = V_{n+1} - V_n$ . C'est un paramètre exogène que l'on va noter  $\mathbb{E}(Z_n) \stackrel{def}{=} \mathbb{E}(\Delta V_n) = -\nabla_x \langle p \rangle \Delta t$ . De la même façon, on peut estimer le taux de dissipation de la turbulence moyen par  $\mathbb{E}(\varepsilon_n) \stackrel{def}{=} \mathbb{E}(\Delta V_n \Delta V_n)/(C_0 \Delta t)$ . En écrivant cela on rompt le modèle, notamment pour ce qui est de l'incompressibilité, mais ces caractéristiques seront restaurées par l'observation du fluide qui lui aura ces traits.

Pour terminer l'étape de discrétisation, il faut noter que la vitesse discrète  $V_n$  ne permet de voir que les phénomènes portant sur 2 pas de temps. Le calage du modèle de vitesse par

l'observation ou la modélisation de structures par une série de vitesse ne permettent pas la prise en compte de phénomènes d'échelles plus petites n'agissant pas sur les échelles supérieures. En revanche le processus de positions des particules, lui, subit l'influence des structures sous discrétisées. On va donc considérer l'impact des structures sous maille sur la position comme étant un bruit de loi normale  $\sigma^X \Delta B_n^X$ , avec  $\mathbb{E}(B_n B_m) = \delta(n - m)$  pour 2 instants  $n$  et  $m$ . On aurait pu choisir une autre sorte de bruit, par exemple en prenant un processus brownien fractionnaire.

### 3 Filtrage conditionnel d'un fluide observé

Le problème de filtrage d'une série d'observations bruitées  $(Y_0 \dots Y_n)$  d'un processus aléatoire  $(\mathcal{X}_0 \dots \mathcal{X}_n)$ , où  $Y_i$  est l'observation de  $\mathcal{X}_i$  au  $i$ -ème instant, s'écrit comme l'estimation de la loi  $(\mathcal{X}_0 \dots \mathcal{X}_n | Y_0 \dots Y_n)$ . Ce problème fonctionnel trouve une solution asymptotique dans l'approche particulaire (on pourra lire Del Moral (2004)), l'estimation se faisant de manière trajectorielle. Dans notre cas, à l'instant  $n$ , le processus  $(X_n, V_n)$  est markovien et suit le noyau de transition  $M_{n, \eta_n}$  où  $\eta_n$  est la loi de  $(X_n, V_n)$ . C'est un processus d'évolution à champs moyen pour lequel la méthode de filtrage classique nécessite de passer par la simulation de  $d$  systèmes de  $N$  particules sur lesquels on estime la loi  $\eta_n$ . Cette méthode est numériquement très lourde et nous proposons de l'optimiser en conditionnant le fluide aux observations. C'est alors un autre problème où le processus évolue selon le noyau  $M_{n, \hat{\eta}_n}$ , où  $\hat{\eta}_n$  est la loi de  $(X_n, V_n)$  sachant les observations  $(Y_0 \dots Y_n)$ . Cela est possible par la forme particulière du modèle de Pope discret où, comme on l'a vu dans la section précédente, on peut approcher les grandeurs eulériennes (gradient de pression, taux de dissipation turbulente, moyennes) par des estimées sur le système de particules. Le système de la dynamique discrétisé et conditionné aux observations s'écrit alors :

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + V_n \Delta t + \sigma_n^X \Delta B_n^X \\ V_{n+1} = V_n + \mathbb{E}(Z_n | Y_0 \dots Y_n) \Delta t \\ \quad - C_1 \frac{\mathbb{E}(\varepsilon_n | Y_0 \dots Y_n)}{k_n} \left[ V_n - \frac{\int v G^\delta(X_n - x) \mathbb{P}^{(X_n, V_n | Y_0 \dots Y_n)}(d(x, v))}{\int 1 G^\delta(X_n - x) \mathbb{P}^{(X_n, V_n | Y_0 \dots Y_n)}(d(x, v))} \right] \Delta t \\ \quad + \sqrt{C_0} \mathbb{E}(\varepsilon_n | Y_0 \dots Y_n) \Delta B_n^V \end{cases}$$

$$\text{avec } k_n = \frac{1}{2} \int \left[ w - \frac{\int v G^\delta(z - x) \mathbb{P}^{(X_n, V_n | Y_0 \dots Y_n)}(d(x, v))}{\int 1 G^\delta(z - x) \mathbb{P}^{(X_n, V_n | Y_0 \dots Y_n)}(d(x, v))} \right]^2 \mathbb{P}^{(X_n, V_n | Y_0 \dots Y_n)}(d(z, w)).$$

L'algorithme de filtrage est une estimation par arbre généalogique génétique (voir Del Moral (2004)). L'étape de sélection des particules utilise l'équation d'observation  $Y_n = X_n + \text{Bruit}$ . C'est la densité de la loi du bruit qui fournit le potentiel de sélection. L'étape de mutation utilise le noyau markovien conditionné aux observations que l'on vient de voir. Par ces 2 étapes, le filtre reconstitue de manière récursive la loi  $((X_0, V_0) \dots (X_n, V_n) | Y_0 \dots Y_n)$  recherchée en utilisant un ensemble de  $N$  particules  $(X_n^{i, N}, V_n^{i, N})$ .

Les équations de Pope sont des modèles 1 point, valable pour un fluide localement homogène. Qui plus est nous avons conditionné le comportement à une observation lui donnant ainsi un sens local, il nous faut donc ajouter à l'étape de mutation une localisation dans une boule d'un rayon prédéfini  $R$  :  $B_n = \{(x, v) : d(x, m_n) \leq R\}$  centrée sur la position moyenne  $m_n = \int x \hat{\eta}_n(dx)$ .

Le filtre ainsi décrit a une dynamique singulière, où le niveau de bruit nous fait passer du modèle de dynamique a priori pour les bruits les plus forts (pas d'information dans le signal) à un modèle linéaire bruité pour des observations parfaites (quand l'observation est parfaite, on

se place à la résolution la plus fine et les particules ont des trajectoires presque rectilignes).

## 4 Application de la méthode à des mesures réelles ou simulées

Pour valider la technique sur des données réelles ou simulées, nous proposons de prendre un signal de référence que l'on perturbe artificiellement pour avoir un signal bruité et pour lequel on demande à notre filtre de retrouver la valeur référence. Deux types de signaux référant sont présentés dans cet article.

### 4.1 Filtrage de mesures unidimensionnelles simulées

Le modèle de Pope discret valable pour un système de particules est utilisé pour simuler un signal 1D de vitesse d'un fluide turbulent. Pour chaque instant on fournit à l'algorithme de construction une valeur pour  $Z_n$  et pour  $\varepsilon_n$ . Pour bruiteur notre signal nous utilisons un simple bruit blanc de loi gaussienne de variance connue. Notons que l'aspect gaussien du bruit n'est pas nécessaire au fonctionnement du filtre, il pourrait avoir une loi de probabilité quelconque. Notre filtre utilise alors 100 particules pour ses estimations. On voit sur la figure (1) en noir le signal de référence à retrouver, en bleu clair le signal bruité, et en rouge les valeurs estimées.

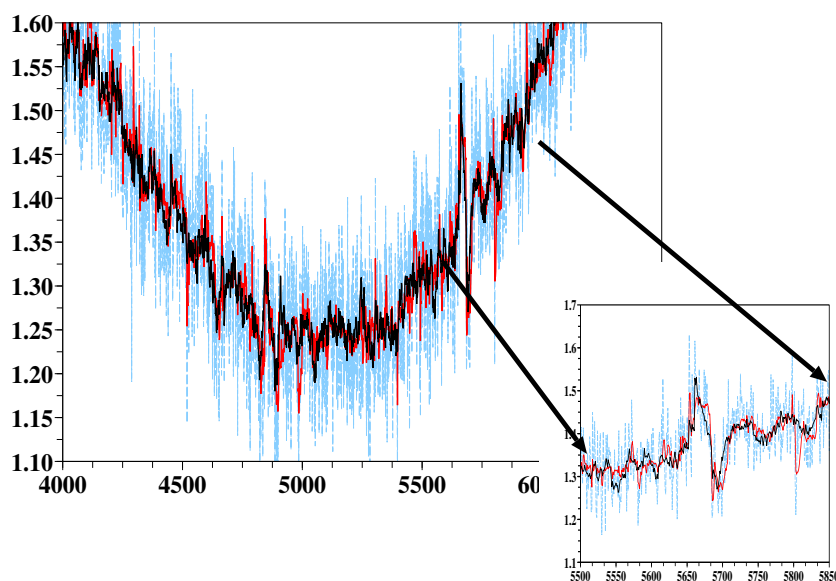


FIG. 1 – Filtrage d'un vent 1D simulé filtré par algorithme particulaire conditionnel avec 100 particules. En poillé bleu le signal bruité, en noir le signal de référence et en rouge le vent estimé.

### 4.2 Cas de mesures réelles pour un écoulement atmosphérique tridimensionnel

Dans le cas d'un écoulement 3D pour un fluide pesant et stratifié comme dans l'atmosphère, il faut adapter le modèle de Pope et on s'inspire de Das & Durbin (2005). Ce modèle est couplé

sur la verticale et utilise la température locale du fluide. Il a pour expression continue a priori :

$$\left\{ \begin{array}{l} dV_{h,t} = -\nabla_h \langle p \rangle .dt - \frac{C_1}{2} \frac{\varepsilon_t}{k_t} (V_{h,t} - \langle V \rangle_{h,t}) .dt \\ \quad + (C_{2\theta} - 1) .(W_t - \langle W \rangle_t) . \frac{d\langle V \rangle_{h,t}}{dz} .dt \\ \quad + (C_0 .\varepsilon_t)^{\frac{1}{2}} dB_t^{V_h} \\ dW_t = d\langle W \rangle_t - \frac{C_1}{2} \frac{\varepsilon_t}{k_t} (W_t - \langle W \rangle_t) .dt \\ \quad + (1 - C_{5\theta}) .\beta .g .(\theta_t - \langle \theta \rangle_t) .dt + (C_0 .\varepsilon_t)^{\frac{1}{2}} dB_t^W \\ d\theta_t = d\langle \theta \rangle_t - (C_{1\theta} - \frac{C_1}{2}) \frac{\varepsilon_t}{k_t} (\theta_t - \langle \theta \rangle_t) .dt \\ \quad - (W_t - \langle W \rangle_t) . \frac{d\langle \theta \rangle_t}{dz} .dt + (C_\theta)^{\frac{1}{2}} dB_t^\theta \end{array} \right.$$

où  $V_{h,t}$  est la vitesse 2D horizontale,  $W$  la vitesse verticale,  $\theta$  la température,  $\beta$  le coefficient de flottabilité. Pour les constantes, voir Das & Durbin (2005).

Usant de la même technique nous approchons les grandeurs cachées de l'observation, comme les gradients verticaux, ou le coefficient de flottabilité, par des estimées sur le système de particules. L'application se fait sur des mesures réelles du vent en un point. Nous avons perturbé le signal de référence par un bruit gaussien dont la variance augmente avec le niveau de turbulence. Sur la figure 2 nous retrouvons les signaux de référence en noir, les signaux bruités en bleu ciel et filtrés en rouge.

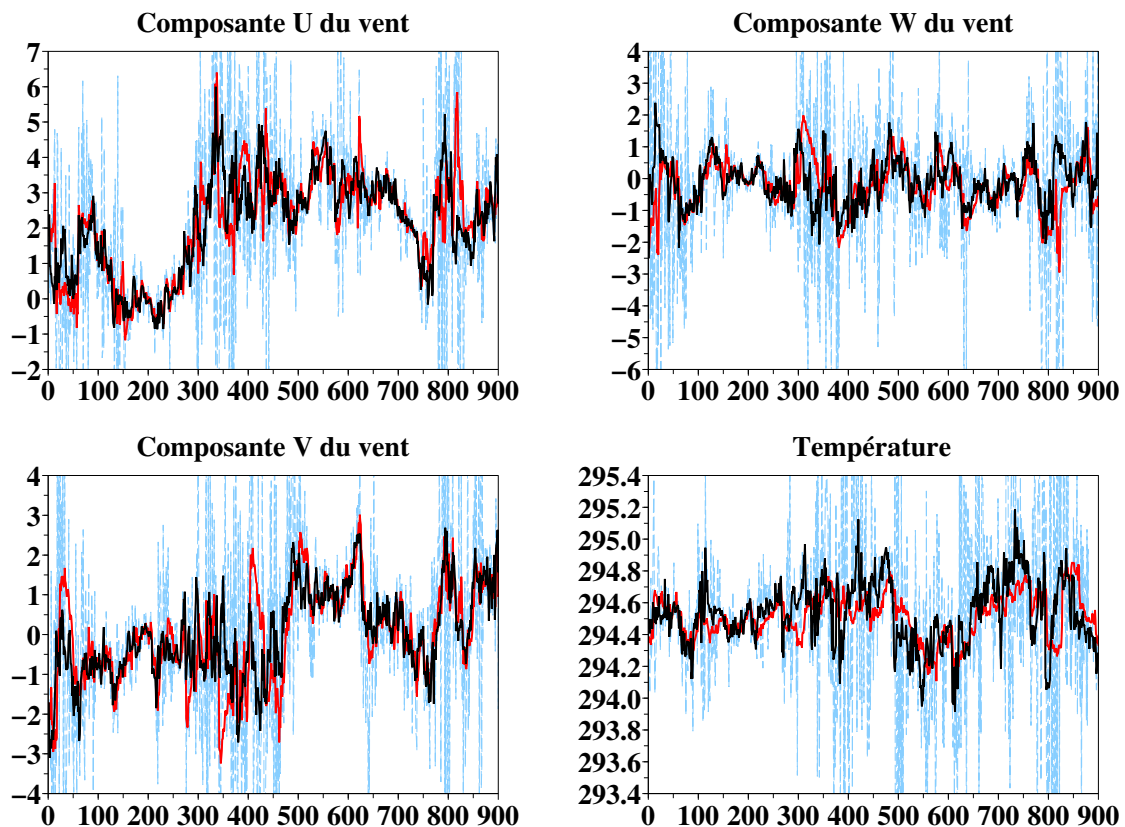


FIG. 2 – Filtrage d'un vent 3D et de la température réels par algorithme particulaire conditionnel avec 800 particules. En pointillé bleu les signaux bruités, en noir ceux de référence et en rouge les valeurs estimées par l'algorithme

On notera le comportement moins bon de la température filtrée. A ce stade, nous disposons de 2 hypothèses, soit le modèle est moins pertinent pour cette quantité, soit la mesure référente

est moins fiable. D'autres expérimentations nous préciseront cela. Pour le reste il existe un bon accord entre les signaux de référence et les signaux filtrés. On peut alors considérer que l'algorithme est utilisable pour filtrer les mesures turbulentes. L'un des avantages de la technique est de permettre de restituer a posteriori les grandeurs cachées (gradients divers, taux de dissipation, coefficient de flotabilité, etc) qui ont été calculé pour ajuster le modèle de dynamique. La validation de ces estimations rapides est en cours et fera l'objet d'une communication ultérieure.

## 5 Conclusions et perspectives

Cette méthode originale nous a permis au travers d'un modèle de comportement de débruiter les mesures de vitesses d'un fluide turbulent inertiel, et d'en estimer les paramètres caractéristiques. La puissance des méthodes particulières stochastiques a été mise en valeur, notamment en permettant la fermeture du système par les observations. Nous avons vu l'apport du conditionnement du modèle aux observations qui réduit fortement les temps de calculs par la résolution sur un seul système de particules. Ces techniques ont permis de filtrer les mesures simulées ou réelles faites dans l'atmosphère, avec un système de mesures fixes. Les résultats probants obtenus ici, nous permettent d'envisager la prochaine étape qui portera sur l'application de la méthode à des mesures effectuées à partir de plateformes mobiles, où il faudra prendre en compte le croisement de trajectoires, ensuite nous pourrions passer aux mesures de vitesses indirectes telles que réalisées par les avions expérimentaux échantillonnant l'atmosphère.

## Références

- Pope, S.B. 2000 *Turbulent Flows*. Cambridge University Press
- Del Moral, P. 2004 *Feynman-Kac Formulae, Genealogical and Interacting Particle Systems with Applications*. Series : Probability and its Applications, Springer-Verlag, Berlin
- Méléard, S. 1996 Asymptotic Behaviour of some interacting particle systems *In Probabilistic Models for nonlinear partial differential equations, LNM 1627* pp. 42-95, Springer-Verlag, Berlin.
- Sznitman, A.S. 1991 Topics in propagation of chaos *In Ecole d'été de Probabilités de St Flour XIX - 1989, LNM 1464* pp. 165-251, Springer-Verlag, Berlin.
- Das, S.K. & Durbin P.A. 2005 A Lagrangian stochastic model for dispersion in stratified turbulence. *Physics of Fluids* **17-2** 025109