Propagation d'incertitude intrusive pour les systèmes hyperboliques Rencontre Météo/Math Appli sur les Incertitudes

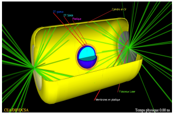
B. Després (CEA-DAM-DIF, F-91297, Arpajon, France ens. Paris VI/JLL)
avec D. Lucor (UPMC, LMM) et G. Poette (PhD CEA-DIF)

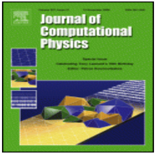
CEA-DIF

26 mars 2009

Pourquoi faire de la “Propagation d’Incertitudes” ?

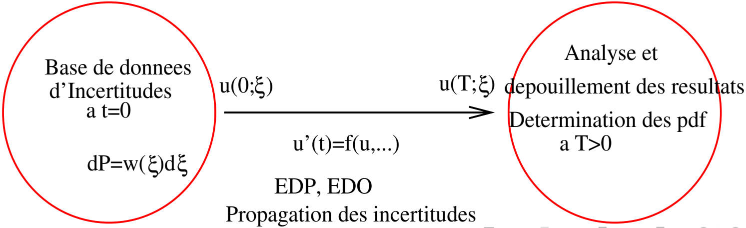
- Sujet émergeant au niveau des applications (physique, industrie). La technologie le permet.



- Je suppose que la mesure de probabilité est une donnée (bases de données physiques) Par exemple :

$$d\mathcal{P} = d\xi, \qquad d\mathcal{P} = e^{-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{2\sigma}} d\xi, \quad \cdots$$



Introduction
Cadre théorique
Mise en oeuvre
Résultats : Burgers
Système des gaz compressibles
Incertitudes sur les coefficients
Conclusion

Mécanique des fluides compressibles (MMC)

Exemple physique principal : le système de la dynamique des gaz compressibles non visqueux

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, & \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, & p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + p u) = 0, & e = \varepsilon + \frac{1}{2}u^2, \\ \partial_t(\rho S) + \partial_x(\rho u S) \leq 0, & S = -\rho \log(\varepsilon \rho^{-\gamma}). \end{cases}$$

On peut considérer que notre étude est dans la ligne des références suivantes

- N. Wiener, **The homogeneous chaos**, 1938.
- G. Lin, C.-H. Su, and G. E. Karniadakis, **Predicting shock dynamics in the presence of uncertainties**, JCP 2006.
- Y. Yu, M. Zhao, T. Lee, N. Pestiau, W. Bo, J. Glimm, J.W. Grove, **Uncertainty quantification for chaotic computational fluid dynamics**, JCP 2006.

Les incertitudes sont sur les conditions initiales, les conditions aux bords, les coefficients matériels, voire même dûes des bifurcations chaotiques

Approche par moments

On part d'un système de lois de conservation général

$$\partial_t U + \partial_x f(U) + \partial_y g(U) ='' 0'', \qquad U = U(t, x, \xi) \in \mathbb{R}^n.$$

- On commence par construire une famille de polynomes orthogonaux pour la mesure de probabilité $d\mathcal{P} = w(\xi)d\xi$

$$\int \varphi_p(\xi)\varphi_q(\xi)w(\xi)d\xi = \delta_{pq}.$$

- Méthodes de moments $U(\xi) \approx \sum_p U_p\varphi_p(\xi)$ avec des polynômes orthonormés pour

$$U_p(t, x) = \int U(t, x, \xi)\varphi_p(\xi)w(\xi)d\xi.$$

  Puis on fait évoluer le problème, c'est à dire qu'on détermine des lois d'évolution pour les moments

$$U_p = U_p(t, x), \qquad 0 \leq p \leq P.$$

- On postule que c'est assez précis dès que P est assez grand.
  Les nombres d'inconnues est passé de n à $n \times (1 + P)$.
- En pratique on utilise des points de quadrature. Dans notre cas nous sur-échantillonons pour avoir des intégrales "exactes".

Reconstruction de U

- Une approche classique consiste à se donner une entropie, c'est à dire une fonction strictement convexe. Dans l'**approche statistique** (reconstruction d'une information dégradée) on prendra l'entropie de l'information

$$s(U) = U \log U - U \qquad \left(s'(U) = \log U\right).$$

On cherchera la fonction U qui minimise l'entropie, $s(U)d\xi \leq \int s(\widetilde{U})d\xi$ pour tout $\widetilde{U}$, les moments étant donnés

$$\int U(\xi)\varphi_p(\xi)w(\xi)d\xi = U_p, \qquad 0 \leq p \leq P.$$

Le minimum (si il existe) est unique. C'est aussi le point critique du Lagrangien

$$L(\widetilde{U},\mu) = \int s(\widetilde{U})d\xi - \sum_p \mu_p \left(\int \widetilde{U}(\xi)\varphi_p(\xi)w(\xi)d\xi - U_p\right).$$

D'où la formule de représentation

$$s'(U) = \sum_{p\leq P} \lambda_p\varphi_p(\xi) \iff U = (s')^{-1}\left(\sum_{p\leq P}\lambda_p\varphi_p(\xi)\right) = e^{\sum_{p\leq P}\lambda_p\varphi_p(\xi)}.$$

- Du point de vue des numériciens on peut préférer

$$s(U) = \frac{1}{2}U^2.$$

Auquel cas on retrouve la formule bien connue d'approximation par moindre carrés

$$U = \sum_{p\leq P}\lambda_p\varphi_p(\xi) = \sum_{p\leq P} U_p\varphi_p(\xi).$$

Vademecum de théorie hyperbolique

- Le système de lois de conservation

$$\partial_t U + \partial_x f(U) = 0 \text{ où } U(x,t) \in \mathbb{R}^N.$$

est hyperbolique, c'est à dire bien posé (les petites perturbations régulières sont stables), ssi

$$A = \nabla f(U) \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (valeurs propres et vecteurs propres réels). Du point de vue des EDP, il est hors de question d'avoir un système non hyperbolique.

- La fonction $U \mapsto s(U) \in \mathbb{R}$ est une entropie ssi il existe un flux d'entropie $U \mapsto g(U) \in \mathbb{R}$

$$\nabla g(U) = \nabla s(U) \nabla f(U) \text{ et } \nabla^2 s(U) = \left(\nabla^2 s(U)\right)^t > 0.$$

Pour une solution U régulière, alors $\partial_t s(U) + \partial_x g(U) = (\nabla s(U), \partial_t U + \nabla f(U) \partial_x U) = 0$.

Théorème

Godunov *Un système avec une entropie est hyperbolique.*

Exemple physique principal : le système de la dynamique des gaz compressibles non visqueux

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, & \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, & p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + p u) = 0, & e = \varepsilon + \frac{1}{2}u^2, \\ \partial_t(\rho S) + \partial_x(\rho u S) \leq 0, & S = -\rho \log(\varepsilon \rho^{-\gamma}). \end{cases}$$

Illustration sur un exemple simple

Soit le p-système en coordonnées lagrangiennes qui est **hyperbolique**
$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_t \tau - \partial_m u & = & 0, \\ \partial_t u + \partial_m p(\tau) & = & 0, \end{array}\right.$ hyperbolique et $\frac{\partial p}{\partial \tau} < 0$ avec la fermeture $p(\tau)$.
Une loi de pression admissible est $p = \frac{1}{\tau^2} = \rho^2$ qui est le carré de la densité.
Appliquons la méthode.

- $(\phi_k)_{k\in\{0,\dots,P\}}$ Base $\perp$ /mesure uniforme sur $[-1,1]$, $\mathrm{d}\mathcal{P}(\xi) = \frac{1}{2}\mathrm{d}\xi$.
- On développe τ, u : $\tau = \sum_{k=0}^{P} \tau_k \phi_k$ avec $\tau_k = \int \tau \phi_k \mathrm{d}\mathcal{P}$. On obtient le système

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \dots \\ \tau_P \end{pmatrix} - \partial_m \begin{pmatrix} u_0 \\ \dots \\ u_P \end{pmatrix} = 0, \\ \partial_t \begin{pmatrix} u_0 \\ \dots \\ u_P \end{pmatrix} + \partial_m \begin{pmatrix} p_0 \\ \dots \\ p_P \end{pmatrix} = 0. \end{array}\right.$$

- Il y a 2 conditions nécessaires d'hyperbolicité pour le grand système

$$(CN_1)\ A_{i,j} = \frac{\partial p_i}{\partial \tau_j} < 0 \quad et \quad (CN_2)\ \sum_{k=0}^{P} \tau_k \phi_k > 0.$$

La satisfaction de ces conditions nécessaires de stabilité dépend de la fermeture.

Debusshere *et al.* propose plusieurs façons pour traiter les non linéarités :

1.) $\tau^2 p = 1 \Longrightarrow \sum_{i,j,k=0}^{P} \tau_i \tau_j p_k c_{i,j,k,l} = \delta_{0,l} \; \forall l \in \{0, \dots, P\}.$

2.) Taylor de p au voisinage de τ_0 : $p = \frac{1}{\tau^2} \approx \frac{1}{\tau_0^2} - 2\frac{\tau - \tau_0}{\tau_0^3} + \dots.$

3.) Witteveen *et al.* $p_k(\tau_0, \dots, \tau_P) = \int p \left(\sum_{l=0}^{P} \tau_l \phi_l(\xi) \right) \phi_k(\xi) \mathrm{d}\mathcal{P}(\xi), \; \forall k \in \{0, \dots, P\}.$

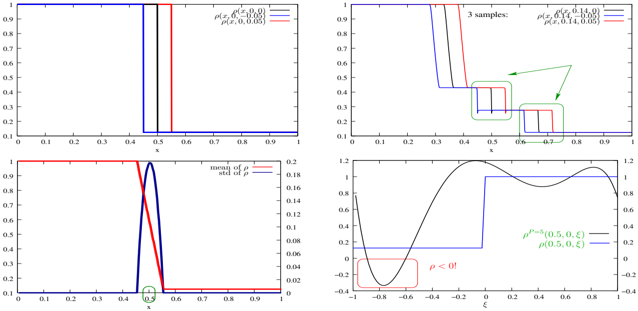
$p(\tau) = \frac{1}{\tau^2}$	1.)	2.)	3.)
$P = 1$	hyperbolique	faiblement hyperbolique	hyperbolique
$P = 2$	hyperbolique	faiblement hyperbolique	?
$\forall P$	?	?	?

$p(\tau) = -\ln(\tau)$	1.)	2.)	3.)
$P = 1$	Non applicable	faiblement hyperbolique	hyperbolique
$P = 2$	Non applicable	faiblement hyperbolique	?
$\forall P$	Non applicable	?	?

Problèmes numériques

Les solutions numériques naturelles sont discontinues.
Soit un problème de Riemann avec incertitudes sur la position initiale de la discontinuité

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, & \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, & p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + p u) = 0, & e = \varepsilon + \frac{1}{2}u^2. \end{cases}$$



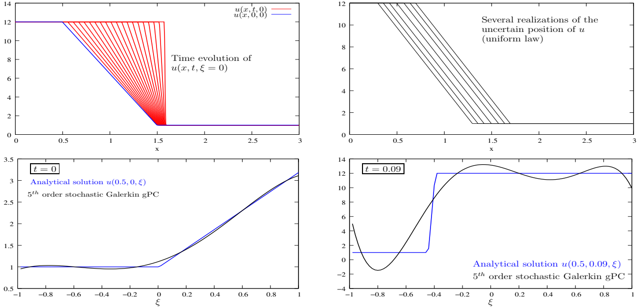
La première approximation est négative pour la densité : c'est le phénomène de Gibbs.
Le calcul ne démarre pas.

Plus subtil

Considérons une donnée initiale compressive mais continue pour l'équation de Burgers

$$\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x u^2 = 0$$

avec incertitude sur la position initiale



La première approximation est positive : le calcul démarre. Mais au bout d'un certain temps, une discontinuité apparait dans l'espace ξ. Le calcul s'arrête car la quantité d'intérét devient négative et pert tout sens physique.

On a un phénomène de Gibbs en ξ, car on utilise un méthode de type Galerkin dans la variable ξ.

Troncature de systèmes de lois de conservation hyperboliques

Nous considérons la projection de type Galerkin

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0, \qquad U(x,t) \in \mathbb{R}^{n\times(N+1)}$$

avec

$$U(x,t) = \int u(x,t;\xi) \begin{pmatrix} \phi_0(\xi) \\ \dots \\ \phi_N(\xi) \end{pmatrix} w(\xi)d\xi \qquad F(U) = \int f(u(x,t;\xi)) \begin{pmatrix} \phi_0(\xi) \\ \dots \\ \phi_N(\xi) \end{pmatrix} dw(\xi)d\xi.$$

On rappelle que les polynômes $\phi_j(\xi)$ sont les polynômes orthogonaux pour le produit scalaire associé à la mesure de probabilité

$$\int \varphi_j(\xi)\varphi_k(\xi)w(\xi)d\xi = \delta_{jk}.$$

Il faut **fermer** ce système. Pour $u(t,x;\xi) = \sum_{p=0}^{N} u_p(x,t)\phi_p(\xi)$ on parle de système intrusif. C'est l'approximation de Galerkin classique.

La variable adjointe

Nous faisons un parallèle entre la détermination de bons systèmes d'EDP pour la propagation d'incertitudes et les méthodes de moments bien connues en modélisation (passage cinétique-fluide).
Les moments étant donnés

$$\int_0^1 u\varphi_p d\xi = \mu_p,$$

nous décidons que la fonction u minimise intégrale en ξ l'entropie du système de départ

$$S(u) = \int s(u) d\xi.$$

On reformule sous la forme du minimum d'une fonctionelle strictement convexe, à l'aide du Lagrangien

$$L(u,\lambda) = J(u) + \lambda \cdot F(u) = \int s\left(u\right) - \sum_{p=0}^{N} \lambda_p \left(\int_0^1 u(\xi)\varphi_p(\xi) d\xi - \mu_p \right).$$

Les conditions d'optimalité sont

$$\begin{cases} (\nabla_u L, \tilde{u}) = \int \nabla s(u) \cdot \tilde{u} - \sum_{p=0}^N \lambda_p \int_0^1 \tilde{u}\varphi_p(\xi) d\xi = 0, \qquad \forall \tilde{u}, \\ \nabla_{\lambda_p} L = \int_0^1 u(\xi)\varphi_p(\xi) d\xi - \mu_p = 0. \end{cases}$$

Notons que la première équation est équivalente à

$$v = \sum_{p=0}^{N} \lambda_p \varphi_p(\xi).$$

Le système stochastique tronqué (=IPMM)

La variable adjointe $v = \nabla s(u)$ est un polyôme en ξ

$$v(t,x;\xi) = \sum_{p=0}^{N} v_p(x,t)\phi_p(\xi)$$

avec par ailleurs le même système d'EDP

$$\partial_t \int u(x,t;\xi) \begin{pmatrix} \phi_0(\xi) \\ \dots \\ \phi_N(\xi) \end{pmatrix} w(\xi)d\xi + \partial_x \int f(u(x,t;\xi)) \begin{pmatrix} \phi_0(\xi) \\ \dots \\ \phi_N(\xi) \end{pmatrix} dw(\xi)d\xi = 0.$$

Si $s(u) = \frac{u^2}{2}$ alors $v = u$ et on retrouve la méthode intrusive classique.

Théorème

Le système tronqué est bien posé (hyperbolique).
Muller-Ruggieri, Boillat, Liu-Levermore-Cheng, ..., $\leq$ 1994.

Preuve : si le système tronqué possède une entropie strictement convexe, alors il est hyperbolique. Soient

$$S(U_p) = \int s(u(v(x,t;\xi)))w(\xi)d\xi \text{ et } G(U_p) = \int g(u(v(x,t;\xi)))w(\xi)d\xi.$$

Alors

$$\partial_t S(U_p) + \partial_x G(U_p) = \int v(x,t;\xi)\,(\partial_t u + \nabla g \partial_x u)\,w(\xi)d\xi = \int v\partial_t u\; w(\xi)d\xi + \int v\partial_x f(u)\; w(\xi)d\xi$$

$$= \sum_p v_p(x,t)\left(\int \phi_p(\xi)\partial_t u\; w(\xi)d\xi + \int \phi_p(\xi)\partial_x f(u)\; w(\xi)d\xi\right) = 0.$$

Par ailleurs S est strictement convexe. CQFD.

Mise en oeuvre numérique et traitement des non-linéarités

On utilise un schéma de VF standard

$$\frac{U_j^{k+1} - U_j^k}{\Delta t} + \frac{f_{j+\frac{1}{2}}^k - f_{j-\frac{1}{2}}^k}{\Delta x} = 0.$$

On suppose que au début du pas de temps, on connait les coefficients $v_j^{p,k}, \quad 0 \leq p \leq N, \ \forall j$ et les moments de u_j^k.
Plusieurs problèmes se posent :

a) Quel schéma pour le flux $f_{j+\frac{1}{2}}^k$? De type Roe, autre ?

b) Comment calculer le pas de temps Δt (CFL) ? Grâce au théorème d'entrelacement pour les modèles de moments

$$\lambda^{\min}_{u^- \leq u \leq u^+} A(u) \leq \lambda^{\min} A^N \leq \lambda^{\max} A^N \leq \lambda^{\max}_{u^- \leq u \leq u^+} \Longrightarrow \lambda^{\max}_{u^- \leq u \leq u^+} \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

c) Comment calculer v à partir des moments de u, $v_j^{N,k+1}(\xi) = \sum_{p=0}^N v_{p,j}^{N,k+1} \phi_p(\xi)$,

$$\text{à partir de } \mu_j^{k+1} = \int_\xi u(v_j^{k+1}(\xi))\phi_p(\xi), \ 0 \leq p \leq N \ ?$$

En pratique on doit déterminer (à chaque pas de temps $k+1$ et dans chaque maille j) $N+1$ nombres en résolvant $N+1$ équations non linéaires.

Calcul des coefficients de v par minimisation

C'est l'étape clef pour la mise en oeuvre. On suppose que la valeur des moments U^{k+1} est connue au pas de temps $k+1$. Dans chaque maille, on cherche les coefficients λ_j tels que

$$V = \sum_j \lambda_j \varphi_j(\xi) \text{ et } \int_\xi u(V(\xi))\phi_p(\xi) = \mu_j^{k+1}.$$

Soit la transformée de Legendre de l'entropie

$$S^*(V) = -\left\langle U^{k+1}, V \right\rangle + \langle u(V), V\rangle - S(u(V)).$$

Alors on a le résultat classique $S^*(V) \leq S^*(W) \quad \forall W$. Cela vient de

$$\begin{aligned} \nabla_W S^*(W) &= -U^{k+1} + U(W) + \nabla_W U(W) W - \nabla_W U(W) \underbrace{\nabla_U S(U(W))}_{W} \\ &= -U^{k+1} + U(W) = 0. \end{aligned}$$

Donc la détermination de V revient à la minimisation d'une fonctionelle strictement convexe. C'est un problème bien connu, pour lequel un grand nombre d'algoithmes efficaces existe.

Méthode de Newton

En pratique on utilise

$$\widetilde{S^*}(\lambda) = -\sum_j \mu_j \lambda_j + \int \left(u(\sum_j \lambda_j \varphi_j(\xi)) \times \left(\sum_j \lambda_j \varphi_j(\xi) \right) - s(u(\sum_j \lambda_j \varphi_j(\xi)) \right) w(\xi) d\xi.$$

La méthode de descente le long du gradient est

$$\lambda^{q+1} = \lambda^q - \alpha \nabla \widetilde{S^*}(\lambda^q), \qquad 0 < \alpha \leq 1.$$

La méthode de Newton est bien plus efficace

$$\lambda^{q+1} = \lambda^q - \alpha \left(\nabla^2 \widetilde{S^*}(\lambda^q) \right)^{-1} \nabla \widetilde{S^*}(\lambda^q), \qquad 0 < \alpha \leq 1.$$

Description de l'algorithme

Début de pas de temps t^n	
$$u_{k,i}^n = \int u(\sum_{l=0}^{P} v_{l,i}^n \phi_l)\phi_k \mathrm{d}\mathcal{P}.$$	
Résolution d'un système de taille size $n \times (P+1)$: $u_{k,i}^n \rightarrow u_{k,i}^{n+1}$	
$$\frac{1}{\Delta t}\begin{pmatrix} u_{0,j}^{n+1} - u_{0,j}^n \\ \cdots \\ u_{P,j}^{n+1} - u_{P,j}^n \end{pmatrix} + \frac{1}{\Delta x}\begin{pmatrix} \int f_d^* \phi_0 \mathrm{d}\mathcal{P} - \int f_g^* \phi_0 \mathrm{d}\mathcal{P} \\ \cdots \\ \int f_d^* \phi_P \mathrm{d}\mathcal{P} - \int f_g^* \phi_P \mathrm{d}\mathcal{P} \end{pmatrix} = 0.$$	Commun
Évaluation d'intégrales : méthodes standard de quadrature numérique	avec **CIM**
$$f_{k,g}^* = \int f_g^* \phi_k \mathrm{d}\mathcal{P} \approx \sum_{l=0}^{N} w_l f_g^*(\xi_l)\phi_k(\xi_l).$$	
Calcul de $V_i^{n+1} = (v_{0,i}^{n+1}, \cdots, v_{P,i}^{n+1})^t$ depuis $U_i^{n+1} = (u_{0,i}^{n+1}, \cdots, u_{P,i}^{n+1})$?	
Minimisation d'une fonctionnelle convexe $S^*(V) = -\left\langle U_i^{n+1}, V \right\rangle + \langle U(V), V\rangle - S(U(V))$.	Spécifique
Newton (convergence quadratique) $\begin{cases} \text{- } V^k \rightarrow V^{k+1}, \\ \text{- } V^{k+1} = V^k - T'^{-1}(V^k)T(V^k), \\ \text{- } \lVert V^{k+1} - V^k \rVert < \epsilon_{Newt} = 10^{-13}, \\ \text{- avec } V_i^n \text{ pour "guess".} \end{cases}$	à **IPMM**
Fin du pas de temps t^{n+1}	

Exemple de Burgers (cas-test discontinu) $P = 5$.

	CIM	IPMM	rate=CIM/IPMM
temps CPU ($t \in [0, T = 0.09]$)	24 s.	55 s.	0.436
$L^2(\Omega)$−Norme de l'erreur pour (x, t) fixés	0.028122	0.003855	7.293

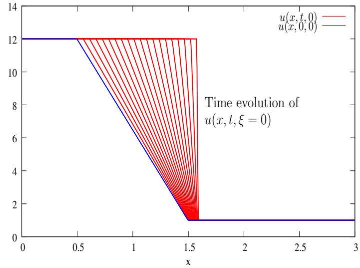
IPMM vs CIM $\Longrightarrow$ temps CPU $\times 2$ avec précision $\times 7$ sur cas-test discontinu.

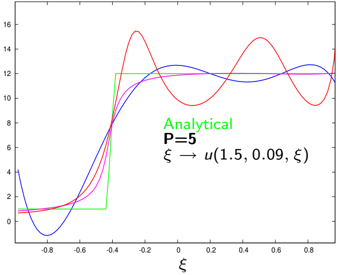
Équation de Burgers' equation avec IPMM, $v = \sum_{k=0}^{P} v_k \phi_k$

- Burgers non visqueux : $\partial_t u + \partial_x \frac{u^2}{2} = 0$.
- Choix de l'entropie :

$$\begin{cases} s_0(u) = \frac{u^2}{2} & v(u) = u \\ s_1(u) = -ln(u - u_-) & v(u) = -\frac{1}{u - u_-} \\ s_2(u) = -ln(u - u_-) - ln(u_+ - u) & v(u) = -\frac{1}{u - u_-} + \frac{1}{u_+ - u} \end{cases}$$

- Choix de u_+ et u_- $\longrightarrow$ contrôle du domaine de définition de $u(v)$.

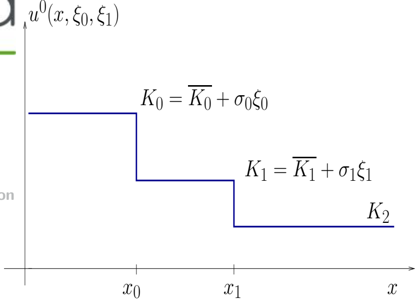


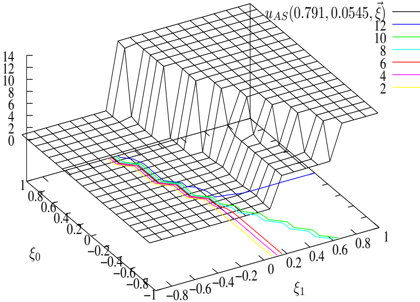


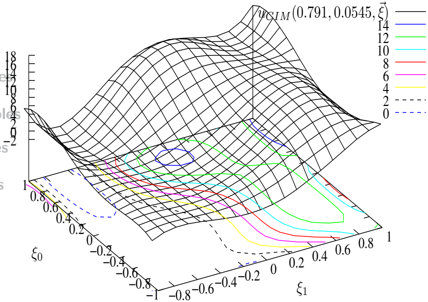
- Pour tous les exemples numériques, on prend la loi uniforme

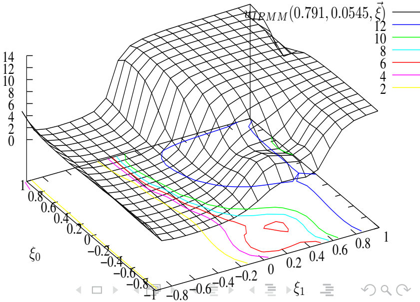
$$d\mathcal{P} = d\xi, \qquad \xi_- \leq \xi \leq \xi^+.$$

Équation de Burgers non visqueuse incertaine en 2D stochastique (1/2)

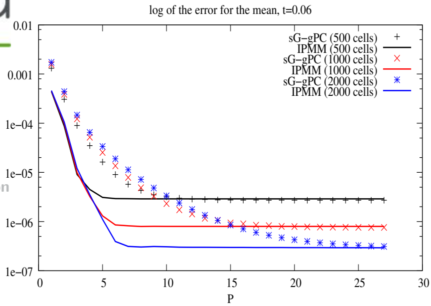


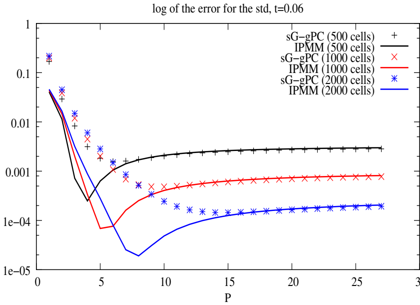


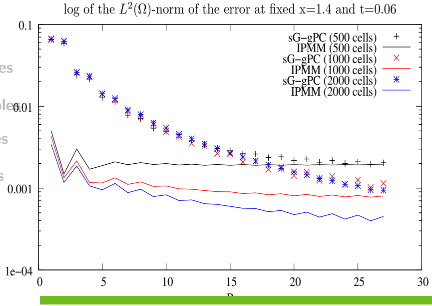




P-Convergence on IC_2







Error for the mean and the std on the whole spatial domain at t=0.06

$\longleftarrow$ **pour** $x = 1.4$, $t = 0.06$ **fixés**

$$e_{CIM} = \int \left(u_{ex}(x,t,\xi) - \sum_{i=0}^{P} u_i(x,t)\phi_i(\xi)\right)^2 \mathrm{d}\mathcal{P}(\xi)$$

$$e_{IPMM} = \int \left(u_{ex}(x,t,\xi) - u\left(\sum_{i=0}^{P} v_i(x,t)\phi_i(\xi)\right)\right)^2 \mathrm{d}\mathcal{P}(\xi)$$

Dynamique des gaz compressibles

- Système de la dynamique des gaz compressibles en 2D d'espace :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) + \partial_y(\rho v u) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v u) + \partial_y(\rho v^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + p u) + \partial_y(\rho v e + p v) = 0, \end{array}\right.$$

avec une fermeture de type gaz parfait : $p = (\gamma - 1)\rho\epsilon$.

- Entropie pour ce système

$$s(\rho, \rho u, \rho v, \rho e) = -\rho \log(\varepsilon \tau^\gamma) = -\rho \ln\left(\rho^{-\gamma}(\rho e - \frac{(\rho u)^2 + (\rho v)^2}{2\rho})\right).$$

- Expression des variables en fonction de la variable adjointe $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)^t$.

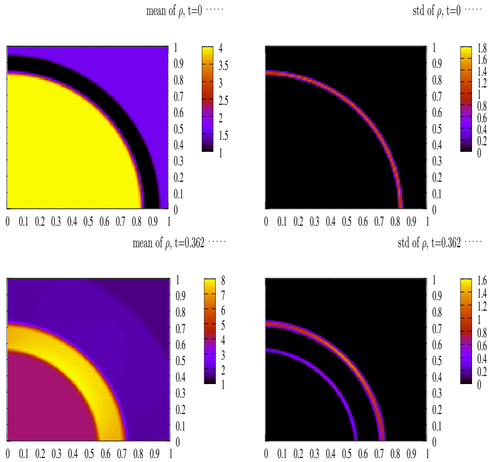
$$\begin{pmatrix} \rho(V) \\ \rho u(V) \\ \rho v(V) \\ \rho e(V) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{2 v_1 v_4 - 2 v_4 \ln(-v_4) - 2 v_4 \gamma - {v_2}^2 - {v_3}^2}{2 v_4(\gamma - 1)}} \\ -\frac{v_2}{v_4} e^{\frac{2 v_1 v_4 - 2 v_4 \ln(-v_4) - 2 v_4 \gamma - {v_2}^2 - {v_2}^2}{2 v_4(\gamma - 1)}} \\ -\frac{v_3}{v_4} e^{\frac{2 v_1 v_4 - 2 v_4 \ln(-v_4) - 2 v_4 \gamma - {v_2}^2 - {v_2}^2}{2 v_4(\gamma - 1)}} \\ \frac{v_2^2 + v_3^2 - 2 v_4}{2 v_4^2} e^{\frac{2 v_1 v_4 - 2 v_4 \ln(-v_4) - 2 v_4 \gamma - {v_2}^2 - v_3^2}{2 v_4(\gamma - 1)}} \end{pmatrix}.$$

$\Longrightarrow$ La positivité de la densité de masse ρ est assurée y compris lorsque V est un polynôme.

- Schéma Lagrange+Projection d'ordre élevé avec splitting directionel.

![cea logo]

Incertitude sur la position de l'interface 2D

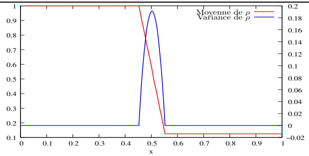
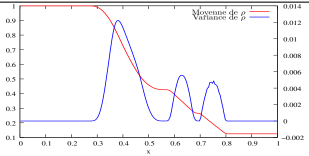
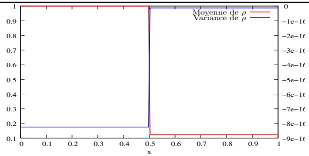
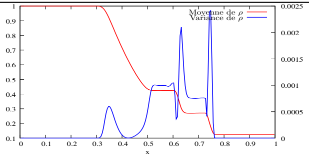


$$
\begin{cases}
\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, & \\
\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, & p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon \\
\partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + p u) = 0, & e = \varepsilon + \frac{1}{2}u^2, \\
\partial_t(\rho S) + \partial_x(\rho u S) \leq 0, & S = -\rho \log(\varepsilon \rho^{-\gamma}).
\end{cases}
$$

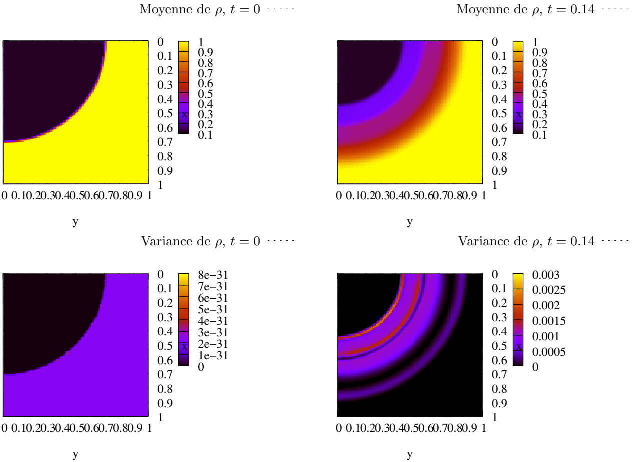
avec

$$\gamma = \gamma(\xi).$$

Dynamique des gaz compressibles : tube à choc de Sod incertain

interface		
γ		

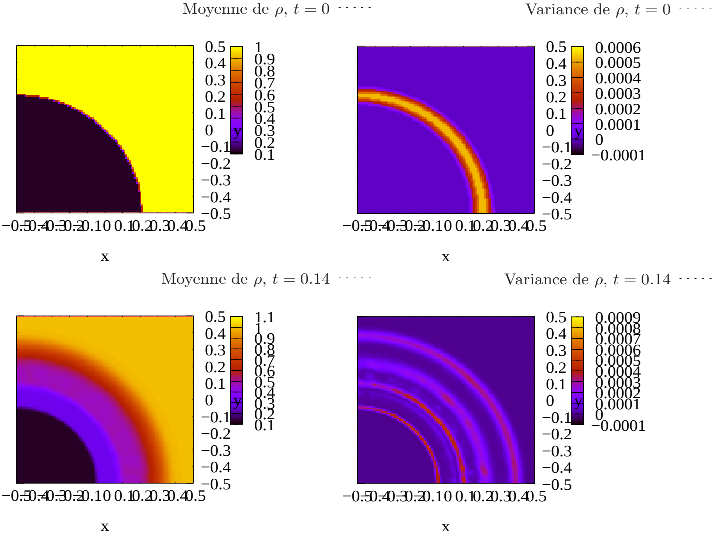
Dynamique des gaz compressibles 2D : γ incertain



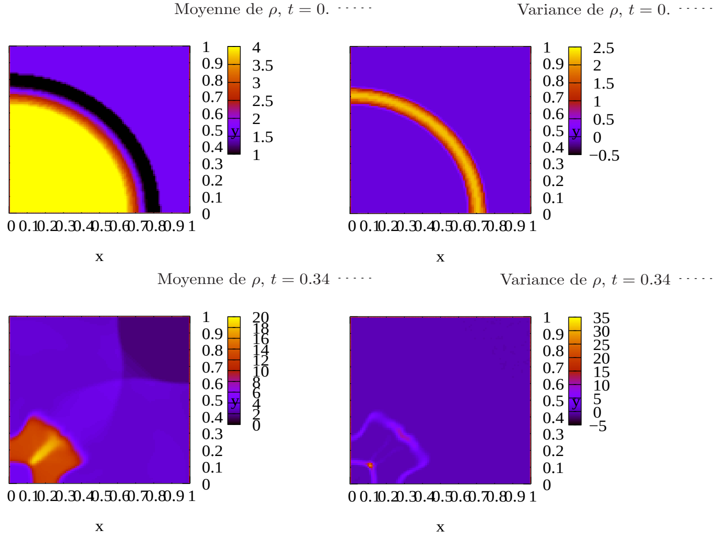
$$\gamma = 1.4 \pm 0.25 = 1.4 + 0.25\xi, \qquad \xi \in [-1, 1],$$

ordre polynomial $N = 5$, intégration numérique $P = 2^c - 1 \geq N$,
100X100 mailles, temps final=0.14, interface initialement en $R = 0.5$.

Euler 2D + interface Karunen-Loeve 3D : $4 \times 20 = 80$ ddl/maille



Euler 2D : Karunen-Loeve pour l'interface (3D)



Conclusion

• La théorie des moments (passage cinétique-fluide, extended rational thermodynamics) offre un cadre bien posé pour la propagation d'incertitudes pour les systèmes hyperboliques.
Plein de problèmes ouverts.

• Pour la propagation d'incertitudes, l'approche intrusive revient à minimiser une succession de problèmes gentils

$$\text{Intrusif} \; : \quad 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T \text{ pour tout } \xi = \xi_1, \xi_2, \cdots .$$

Cela peut se révéler compétitif par rapport à l'approche non intrusive qui cherchera plutôt à minimser un problème final éventuellement méchant, c'est à dire mal conditionné

$$\text{Non intrusif} \; : \quad t_n = T \text{ pour tout } \xi = \xi_1, \xi_2, \cdots .$$

Cela dépendra in fine du problème considéré.

• L'extension à des opérateurs de diffusion thermique ne pose pas de problème conceptuel. Pour les algorithmes c'est ouvert.

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho u e + p u) = \partial_x(K_e(\rho, T)\partial_x T). \end{cases} \qquad p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$$

• Le problème des grandes dimensions reste à traiter. On s'oriente vers l'utilisation de grilles creuses.