Université Paul Sabatier 2021-2022, L1

Mathématiques, Sciences Appliquées
CC1 terminal du 8 octobre 2021
Durée : 2 heures

L'utilisation des calculatrices, téléphones, tablettes ou ordinateurs est interdite.
Toutes les réponses doivent être rigoureusement justifiées.
Le barème est donné à titre indicatif.

Question de cours (2 points). En admettant que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $e^a.e^b = e^{a+b}$, et que les fonctions $x \mapsto e^x$ et $y \mapsto \ln(y)$ sont des fonctions réciproques l'une de l'autres, démontrer que :

$$\forall x, x' \in]0, +\infty[, \quad \ln(xx') = \ln(x) + \ln(x').$$

Corrigé. Voir le corrigé du TD n°4.

Exercice 1 (6 points). On définit les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique comme suit :

$$\cosh : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \sinh : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}. \end{array} \right.$$

1. Les fonctions cosh et sinh sont elles paires ? impaires ? (1 pt)
2. Déterminer $\sinh(0)$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) > 0$. (1 pt)
3. Etudier la dérivabilité de sinh, puis calculer et reconnaître sa dérivée. (1 pt)
4. Dresser le tableau de variations de sinh, en faisant apparaître ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$. (1 pt)
5. Déterminer les plus grands intervalles de concavité et convexité de sinh. Possède-t-elle un point d'inflexion ? (1 pt)
6. A l'aide de toutes les questions précédentes, tracer l'allure de la fonction sinh sur $\mathbb{R}$. (1 pt)

Tournez la page svp ⟶

Corrigé. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous avons $\cosh(-x) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \cosh(x)$. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient que la fonction cosinus hyperbolique est paire. De la même manière, fixons $x \in \mathbb{R}$ et calculons $\sinh(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = -\sinh(x)$. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous en déduisons que la fonction sinus hyperbolique est impaire.

2. On calcule $\sinh(0) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme la fonction exponentielle est à valeurs dans les réels positifs (c'est-à-dire pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $e^t > 0$), on obtient $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$. Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient le résultat souhaité.

3. La fonction sinh est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est la moitié de la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc par le théorème de la dérivée d'une composée, on obtient qu'il en est de même pour la fonction $x \mapsto e^{-x}$). On calcule alors (grâce à la linéarité de la dérivation)
$$\sinh'(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \cosh(x).$$

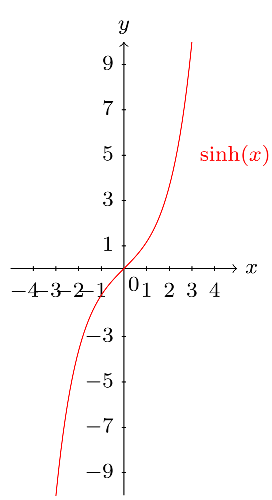
4. Comme on a vu à la question 2 que la fonction cosinus hyperbolique était toujours strictement positive, on obtient grâce à la question 3 le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\cosh(x)$			$+$		
$\sinh(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites au bornes de l'intervalle sont obtenues de la façon suivante :
$$\lim_{x\to+\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$$
puisque $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et le résultat du cours sur la limite d'une somme de fonctions. De la même manière, on trouve
$$\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\infty$$

5. Nous pouvons obtenir les intervalles de concavité et de convexité en calculant la dérivée seconde (il est facile de voir que la fonction sinh est deux fois dérivable). Nous avons
$$\sinh''(x) = \cosh'(x) = \sinh(x).$$
Ainsi $\sinh(x) \leq 0$ pour $x \in \mathbb{R}^-$ et $\sinh(x) \geq 0$ pour $x \in \mathbb{R}^+$. La fonction sinh est donc concave sur $\mathbb{R}^-$ et convexe sur $\mathbb{R}^+$. La dérivée seconde s'annule et change de signe en $x = 0$, et uniquement en ce point, la fonction sinh possède donc un unique point d'inflexion qui est $x = 0$.

6. à l'aide des questions précédentes, on obtient l'allure de la fonction sinus hyperbolique



Exercice 2 (10 points)**.** On définit la fonction f par la formule :

$$f(x) = \frac{5x+3}{2x-1}.$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f. (1 pt)
2. Vérifier que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x) = \dfrac{5}{2} + \dfrac{11}{2} \cdot \dfrac{1}{2x-1}$.
   En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. (1.5 pt)
3. Dresser le tableau de variations de f (en faisant apparaître toutes les limites). (1 pt)
4. Déterminer l'ensemble $f([-1, 0])$. (1 pt)
5. Déterminer l'ensemble $f^{-1}(]-\infty, 0])$. (1 pt)
6. Donner, en justifiant, un intervalle I contenant 0, et J un second intervalle, les plus grands possibles, tels que la restriction $f : I \longrightarrow J$ soit une bijection. (2 pts)
7. Déterminer une expression de $f^{-1} : J \longrightarrow I$. (1 pt)
8. Calculer la dérivée de f^{-1} par deux méthodes différentes. (1.5 pt)

Corrigé.

1. Les fonctions $x \mapsto 5x+3$ et $x \mapsto 2x-1$ sont polynomiales et donc définies sur $\mathbb{R}$. Un quotient est bien défini lorsque le dénominateur est différent de 0. On en déduit que que le domaine de définition de la fonction f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $2x - 1 \neq 0$. On obtient $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{\frac{1}{2}\}$.

2. En remettant les fractions sur le même dénominateur, on trouve :

$$\frac{5}{2} + \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{2x-1} = \frac{5 \cdot (2x-1)}{2 \cdot (2x-1)} + \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{2x-1} = \frac{10x+6}{2 \cdot (2x-1)} = \frac{5x+3}{2x-1}.$$

   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x-1) = -\infty$, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{5}{2} + \frac{11}{2} \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x-1} = \frac{5}{2} \text{ et } \lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{5}{2} + \frac{11}{2} \cdot \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2x-1} = \frac{5}{2}.$$

3. On calcule tout d'abord la dérivée de f et son signe :

$$f'(x) = \frac{5 \cdot (2x-1) - (5x+3) \cdot 2}{(2x-1)^2} = -\frac{11}{(2x-1)^2} < 0.$$

   Au voisinage de $x = \frac{1}{2}$, on a $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (5x+3) = \frac{11}{2}$, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} (2x-1) = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} (2x-1) = 0^+$. Ainsi $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{5x+3}{2x-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{5x+3}{2x-1} = +\infty$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	$\frac{5}{2}$ $\searrow$		$-\infty$ || $+\infty$		$\searrow$ $\frac{5}{2}$

4. Sur l'intervalle $[-1,0]$, la fonction f est strictement décroissante, on a donc

$$f([-1,0]) = [f(0), f(-1)] = \left[-3, \frac{2}{3}\right].$$

5. On a $f^{-1}(]-\infty,0]) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in]-\infty,0]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq 0\}$. Il est facile de résoudre l'équation $f(x) = 0$ et de trouver la solution $x = -\frac{3}{5}$. En utilisant le tableau de variations, on trouve $f^{-1}(]-\infty,0]) = \left[-\frac{3}{5}, \frac{1}{2}\right[$. (On peut aussi chercher à résoudre directement l'inéquation $f(x) \leq 0$.)

6. Le plus grand intervalle contenant 0 sur lequel la fonction f est définie est l'intervalle $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$. Sur cet intervalle, la fonction f est strictement décroissante donc injective. On choisit ainsi $I = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$. Pour que la fonction $f : I \to J$ soit surjective, nous devons choisir $J = f(I) = \left]-\infty, \frac{5}{2}\right[$. La fonction $f : I \to J$ est ainsi bijective.

7. On résout en x l'équation $f(x) = y$. On trouve

$$\begin{aligned} f(x) = y \Leftrightarrow \frac{5x+3}{2x-1} = y \Leftrightarrow 5x+3 = (2x-1)\cdot y = 2xy - y \Leftrightarrow 5x - 2xy = -3 - y \\ \Leftrightarrow x \cdot (5-2y) = -3 - y \Leftrightarrow x = \frac{y+3}{2y-5} = f^{-1}(y). \end{aligned}$$

8. Nous pouvons calculer la différentielle de f^{-1} directement avec l'expression trouvée à la question précédente. Nous trouvons
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1\cdot(2y-5) - (y+3)\cdot 2}{(2y-5)^2} = -\frac{11}{(2y-5)^2}.$$

   Une autre méthode est d'utiliser la dérivée de la fonction réciproque obtenue au moyen de la formule $(f \circ f^{-1})(y) = y$. En dérivant cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y) \cdot f'(f^{-1}(y)) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(y) &= -\frac{(2f^{-1}(y)-1)^2}{11} = -\frac{\left(2\frac{y+3}{2y-5} - 1\right)^2}{11} \\ \Leftrightarrow (f^{-1})'(y) &= -\frac{\left(\frac{2(y+3)-(2y-5)}{2y-5}\right)^2}{11} = -\frac{11}{(2y-5)^2} \end{aligned}$$

   d'après le calcul de dérivée fait à la question 3 et le calcul fait à la question précédente. Le deux résultats coïncident bien !

Exercice 3 (2 points). Soient les fonctions

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \\ x & \mapsto & \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \mapsto & \sqrt{\frac{1-\tan(y)}{1+\tan(y)}}. \end{array} \right.$$

Vérifier que v est une fonction bien définie. En calculant $u \circ v$ et $v \circ u$ sur ces intervalles, vérifier que $v = u^{-1}$.

Corrigé. Pour s'assurer que la fonction v est bien définie, il faut vérifier que la fraction $\frac{1-\tan(y)}{1+\tan(y)}$ est bien définie et positive ou nulle (de façon à pouvoir en prendre la racine carrée). Lorsque $y \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, on a $\tan(y) \in]-1,1]$, ce qui nous assure que la fraction est bien définie et qu'elle est positive ou nulle puisque le dénominateur et le numérateur sont alors positifs (ou nul pour le numérateur).

Calculons pour tout $y \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

$$\begin{aligned} (u \circ v)(y) &= \arctan\left(\frac{1 - \left(\sqrt{\frac{1-\tan(y)}{1+\tan(y)}}\right)^2}{1 + \left(\sqrt{\frac{1-\tan(y)}{1+\tan(y)}}\right)^2}\right) = \arctan\left(\frac{(1+\tan(y)) - (1-\tan(y))}{(1+\tan(y)) + (1-\tan(y))}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{2\tan(y)}{2}\right) = \arctan(\tan(y)) = y, \end{aligned}$$

puisque arctan est la fonction réciproque de tan sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\supset \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ (au départ de la fonction tan). De la même manière, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}(v \circ u)(x) &= \sqrt{\frac{1 - \tan\left(\arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)}{1 + \tan\left(\arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)}} = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}{1 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{(1+x^2) - (1-x^2)}{(1+x^2) + (1-x^2)}} = \sqrt{x^2} = x,\end{aligned}$$

puisque la fonction racine carrée est la fonction réciproque de la fonction carrée sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ (au départ de la fonction $\sqrt{-}$). Ces deux égalités nous assurent que v est la fonction réciproque de u, c'est-à-dire que $v = u^{-1}$.