Méthodes de Monte-Carlo et réduction de la variance

Introduction et notations : Ce TP aborde présente diverses méthodes d'estimation des intégrales. Ces méthodes ont comme outil principal la méthode de Monte-Carlo. On notera dans la suite pour f une fonction réelle, $I(f)$ son intégrale sur pa rapport à la mesure de Lebesgue sous réserve de convergence ; si w est une densité, on note $\mathbb{E}_w[f]$ l'espérance de $f(X)$ où X est une variable dont la densité associée est w, ce qui s'écrit encore $I(fw)$. De plus, $\hat{I}_{w,n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)}{w(x_i)}$, on rappelle que si $\frac{f}{w}$ est intégrable par rapport à w alors cet estimateur converge presque sûrement vers $I(f)$. Enfin, on note $Var_w(f) = \int f^2(x)w(x)dx$. L'estimation de certaines intégrales est cruciale dans de nombreux domaines, en particulier en finance ou en assurance. Dans ce dernier domaine en particulier, on doit modéliser l'occurence d'évènements rares qui "coûtent cher", ce qui peut induire une forte variance sur les calculs d'espérance de primes par exemple.

1 Echantillonnage pondéré (Importance Sampling)

Cette partie est dédiée à la méthode dite de l'importance sampling qui a pour but d'améliorer la convergence de l'estimateur de la moyenne en choisissant une densité réduisant la variance de l'estimateur. Bien sûr, si la fonction à intégrer est de signe constant, le choix optimal pour w est $I(f)/f$, ce qui suppose donc de connaître la valeur cherchée.

Exercice 1 : Un exemple très simple d'importance sampling, soit $f_1 = \mathbf{1}_{x>a}$ et $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

1. Calculer par une méthode de Monte-Carlo (moyenne avec $\hat{I}_{0,n}$ et variance empirique) directe $\mathbb{E}[f_1(X)]$ pour $a = 0$ et $n = 1000$ trajectoires et pour $a = 8$, $n = 1000$ et $n = 10^6$ trajectoires.
2. On se donne la famille de poids w_α la densité associée à une variable $\mathcal{N}(\alpha, 1)$. Pour quel paramètre la réduction de variance sera-t-elle optimale ? (Indication : on pourra utiliser les symétries et une propriété de convexité pour en donner une preuve.) Calcul par Monte-carlo.

On considère maintenant la fonction réelle f_2 linéaire par morceaux qui vaut 0 en dehors de $[a, +\infty]$ et $M > 0$ en dehors de $[-\infty, b]$ avec $a < b$.

1. Proposer une méthode de réduction de variance en utilisant l'importance sampling pour calculer $\mathbb{E}[f_2(X)]$ où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et l'implémenter.
2. Comparer cette méthode à un calcul exact pour une valeur de a très grande, par exemple, $a = 7$. (Indication : la fonction f_2 est une combinaison linéaire de fonction du type $(x-K)_+$.)

Exercice 2 : On considère $N = 100$ variables B_i de Bernoulli i.i.d. de probabilité $p = \mathbf{P}(B_i = 1)$, et on considère $L = \sum_{i=1}^{n} B_i$. On cherche à estimer avec une erreur relative de 1% la quantité suivante : $\mathbb{E}_Q[f_i(L)]$ où f_i est l'une fonction définie dans l'exercice précédent, et Q est la loi de L.

1. Après avoir fait un calcul exact, faire une estimation directe par Monte-Carlo pour des paramètres qui introduiront une variance forte, pour f_2 par exemple.
2. On considère la famille de densités suivante : $\frac{dQ_y}{dQ} = \exp(yL)/\mathbb{E}_Q[\exp(yL)]$ pour $y \in \mathbb{R}$. On cherche le paramètre y qui minimise la variance, i.e. minimiser l'expression $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{L>k}(\frac{dQ}{dQ_y})^2]$. Trouver un majorant simple de cette dernière expression et en déduire un paramètre qui semble réduire la variance.
3. En écrivant explicitement le changement de densité, proposer une méthode de réduction de variance et l'impléménter.

Notons que le calcul exact ne peut plus être mené lorsqu'on introduit des poids sur les variables de Bernoulli, par exemple pour des valeurs $\mathbb{Q}$ linéairement indépendantes le support de la loi de L est de cardinal 2^{100} et le calcul exact est équivalent à un problème combinatoire de complexité exponentielle.

2 Utilisation des symétries (systematic sampling)

Cette partie donne deux exemples d'utilisation des symétries après avoir présenté la démarche.

Exercice 3 : Soit A un domaine de $\mathbb{R}^k$ et w une densité sur A, on considère un ensemble de transformations (difféomorphismes) de A, $\tilde{T} = T_i, i = 1 \dots n$ qui préservent la forme volume et telles que $w \circ T_i = w$. On considère,

$$f^{\tilde{T}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f \circ T_i(x)$$

.

1. Montrer que $Var(\frac{f^{\tilde{T}}}{w}) = Var(\frac{f}{w}) - \mathbb{E}_w[(\frac{f-f^{\tilde{T}}}{w})^2]$. Donner une interprétation géométrique de cette égalité.
2. Proposer une méthode qui pourrait permettre de réduire le temps de calcul et donner la condition d'application. On suppose que le temps de calcul est du aux seules évaluations de la fonction. On constate donc que si $f \circ T_i = f$ quelque soit i, cette méthode est plus coûteuse que la méthode directe.

Exercice 4 : Le contrôle antithétique est une application immédiate des propriétés précédentes.

1. On cherche à calculer $I(f)$ où f est une fonction définie sur $[0, 1]$: implémenter une méthode de réduction de variance et prendre des exemples représentatifs des différentes situations, en utilisant le groupe de transformations Id et $1 - Id$ qui laissent invariante la loi uniforme.
2. Implémenter cette méthode avec le groupe $\{Id, -Id\}$ dans le cadre de l'exercice 1, commenter.

3 Variable de contrôle

Cette technique repose sur l'idée d'introduire une variable Y d'espérance nulle telle que : $Var(X + Y) < Var(X)$, on estime alors $\mathbb{E}[X + Y]$.

Exercice 5 : On considère le prix d'une option sur deux actifs financiers.

$$\varphi(g_1, g_2) := (\lambda_1 \exp(\sigma_1 g_1) + \lambda_2 \exp(\sigma_2 g_2) - K)_+$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2, K > 0$ et où g_1, g_2 sont deux variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Evaluer le prix $\mathbb{E}(\varphi(g_1, g_2))$ en programmant chacune des méthodes suivantes. Comparer leur variance empirique sur un échantillon fixé.

1. Méthode de Monte-Carlo sans réduction de variance, on pourra prendre $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$, $K = 10$, $\sigma_{1,2} = 0,5$.
2. Variables de contrôle.
   (a) "Parité Call–Put" : considérer la variable de contrôle

   $$(\lambda_1 \exp(\sigma_1 g_1) + \lambda_2 \exp(\sigma_2 g_2) - K)_+ - (K - \lambda_1 \exp(\sigma_1 g_1) - \lambda_2 \exp(\sigma_2 g_2))_+$$

   (On rappelle la transformée de Laplace d'une variable gaussienne $\mathcal{N}(0,t)$ est $z \mapsto \exp(\frac{tz^2}{2})$).

   (b) Développement à l'ordre 1 : considérer la variable de contrôle

   $$\left((\lambda_1 + \lambda_2) \exp\left(\frac{\lambda_1 \sigma_1}{\lambda_1 + \lambda_2} g_1 + \frac{\lambda_2 \sigma_2}{\lambda_1 + \lambda_2} g_2\right) - K\right)_+$$

Références

[1] Michael Evans and Tim Swartz : *"Approximating Integrals via Monte Carlo and Deterministic Methods"*, Oxford Statistical Science Series.

[2] Pierre Cohort : *"TP Monte-Carlo pour la finance"*