# Martingales et chaînes de Markov

## 1 Les jeux de pièces

**Exercice 1:** Le "problème des points" et l'option digitale : cet exercice est tiré d'un problème posé par le Chevalier de Méré à Pascal et qui fit l'objet d'une correspondance entre Fermat et ce dernier.

- Deux joueurs misent chacun 1 euro sur leur chance de gagner. Pour gagner, il faut remporter cinq manches d'un jeu de pile ou face non biaisé. Supposons que la partie soit interrompue alors que l'un des joueurs a déjà remporté 3 manches et l'autre 2 manches. Peut-on distribuer les mises (les deux euros) équitablement (celui ayant déjà remporté 3 manches ayant légitimement envie de récupérer plus que l'autre) ?
- Donner la répartition des mises par Matlab et selon deux méthodes différentes.
- L'option digitale : une version actuelle du problème précédent. On considère une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ qui part de 0 : $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ où les variables $X_i$ sont i.i.d. $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. Calculer par une méthode de votre choix, $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{S_n > a\sqrt{n}}]$ pour $n$ grand et différentes valeurs de $a$. (L'option digitale est un produit financier qui garantit 1 euro si le cours du sous-jacent dépasse une barrière $K$ à maturité $T$.)

**Exercice 2:** Deux joueurs A et B jouent à pile ou face avec une quantité initiale respective de $a$ et $b$. Le perdant de chaque manche donne 1 au gagnant et le jeu s'arrête lorsque l'un des deux joueurs est ruiné et le joueur restant est le vainqueur.

- On suppose la pièce non biaisé : déterminer sur le papier (propriété de Markov) la probabilité de gagner le jeu pour A et la retrouver par Matlab.
- On suppose maintenant la pièce biaisée : on en connait la probabilité $p \in ]0,1[$ mais pas la face avantagée. On suppose que le joueur A a la possibilité de choisir avant chaque tirage la face qui le rendra gagnant de la manche. Si le vainqueur se voit récompensé de 1 euro, combien doit miser B si la somme des mises est égale à 1. On montrera la stratégie optimale et on donnera une estimation du prix par une méthode de Monte-carlo.

## 2 Simulation de loi

**Exercice 3:** Une méthode de simulation exacte de la probabilité invariante d'une chaîne de Markov : l'algorithme de Propp et Wilson sur un exemple simple. Pour plus de détails sur cet algorithme, on pourra consulter l'article original de Propp et Wilson.

On considère l'ensemble $E = \prod_{i=1}^N \{0,1\}$ des états de la chaîne de Markov, que l'on munit du noyau de transition décrit par l'algorithme ci-dessous. On se donne un vecteur $P$ de réels dans $]0,1[$. Pour $V \in E$, on tire un échantillon $U$ de taille $n$ de la loi uniforme et selon les cas :

- Si $U[i] > P[i]$ alors $V[i] = 1$.
- Si $U[i] < P[i]/2$ alors $V[i] = 0$.
- Dans le cas restant, si $\sum_{j=1}^{i} V[j] < i/2$ alors $V[i] = 1$ et sinon $V[i]$ est inchangé.

Cet algorithme permet de définir une chaîne de Markov sur $E$. Pour l'implémentation, on essaiera autant que possible de garder les paramètres de cet algorithme en argument.

1. Montrer que cette chaîne de Markov est irréductible et apériodique et étant donné un état de $E$, estimer numériquement la masse de cet état selon la probabilité invariante de cette chaîne de Markov.
2. L'ordre $0 < 1$ induit un ordre partiel sur $E$. On appelle transition un tirage $U$ et on note $f(x, U)$ l'élément obtenu par l'algorithme décrit précédemment. Vérifier que $f(., U)$ est croissante pour toute transition. Conséquence immédiate : Si $f(0^N, U) = f(1^N, U)$, alors $f(., U)$ est une application constante.
3. On pose $\tau = \min\{n : f(., U_1) \circ \ldots \circ f(., U_n) \equiv \mathit{constante}\}$. Montrer que $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ et donner une majoration de $\mathbb{E}(\tau)$.
4. Montrer que la constante donnée par le procédé précédent admet pour loi la probabilité invariante de la chaîne de Markov.
5. Implémenter cette algorithme pour générer les états selon la loi invariante et vérifier le résultat avec l'aide de la question 1.
6. Faire varier les paramètres et commenter.

**Exercice 4:** On cherche à calculer l'intégrale : $I(m) = \int_{\mathbb{R}} m(x)p(x)dx$, ceci pour diverses fonctions $m$ et $p$ une densité de probabilité fixée ; On propose de voir $p$ comme la probabilité invariante d'une chaîne de Markov $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ergodique. Elle vérifie donc le théorème ergodique :

$$\lim_{n\mapsto\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} m(X_i) = I(m).$$

On présente sur un exemple simple, l'algorithme de Hastings-Metropolis sans entrer dans la preuve, qui génère une telle chaîne de Markov. On rappelle que toute probabilité réversible pour un noyau de Markov est une probabilité invariante pour ce noyau. Cet algorithme est une manière de tordre un noyau à choisir pour se retrouver dans ce cas.

1. Rappeler dans le cas où l'espace d'état est dénombrable la condition sur la chaîne de Markov pour que le théorème ergodique soit valide.
2. Soit $Q$ un noyau de transition d'une chaîne de Markov qui est tel que $\forall (x, y) \in Supp(p)^2$, $Q(x, y) > 0$.
   - Initialisation : tirer $x$ dans le support de $p$.
   - Etape $n$ à $n+1$ : tirer $y$ selon $q(x_n, .)$.
   - Tirer une binomiale $B$ de probabilité $\min\{1, \frac{p(y)q(y,x)}{p(x)q(x,y)}\}$.
   - $x_{n+1} = y$ si $B$ et $x$ sinon.

   Vérifier que la distribution de probabilité $p$ est invariante par le noyau décrit par l'algorithme.

3. Implémenter ce procédé et le comparer à une méthode de Monte-Carlo simple pour l'exemple suivant : $Q$ est un noyau symétrique tel que celui engendré par une somme i.i.d de variable aléatoires gaussiennes centrées réduites. La densité considérée ici est la densité issue de la fonction

$$p(x) = ((x-k)_+ - (x-K)_+)n(x)$$

où $n$ est la densité gaussienne standard et on notera $e(x) = (x-k)_+ - (x-K)_+$ pour deux valeurs $k < K$ choisies à votre guise.

# 3 Pour finir

**Exercice 5:** Sur les matrices bistochastiques : on notera $M$ une matrice de taille $n$ à coefficient réels positifs telle que la somme de chaque ligne et la somme de chaque colonne vaut 1. Elle représente alors une chaîne de Markov irréductible sur un ensemble à $n$ éléments ; il existe donc une unique probabilité invariante : la probabilité uniforme. Cce qui peut se démontrer directement.)

1. L'ensemble des matrices bistochastiques est convexe fermé. Toute matrice de ce type s'écrit comme combinaison convexe de matrices de permutation qui en sont les points extrémaux. Implémenter un algorithme qui permet de tirer une permutation au hasard (équidistribué sur les permutations) et ensuite proposer un algorithme permettant de tirer une matrice bistochastique selon une probabilité qui charge les points extrémaux du convexe et toutes ses faces.
2. Soit $Support(M) = S$ la matrice définie par $s_{i,j} = \mathbf{1}_{a_{i,j}>0}$. Montrer qu'il existe un chemin $\{s_{(i_1,i_2)}, s_{(i_3,i_2)}, s_{(i_3,i_4)}, s_{(i_5,i_4)}, \ldots, s_{(i_1,i_{2n})}, s_{(i_1,i_2)}\}$, tel que chaque terme de cette suite soit strictement positif. (Ce chemin se déplace successivement selon les lignes et les colonnes de la matrice.) En déduire que les permutations sont les points extrémaux du convexe des matrices bistochastiques.
3. Montrer alors qu'on peut obtenir une matrice de permutation $P$ telle que $P \leq S$ pour l'ordre partiel ($a_{i,j} \leq b_{i,j}$ pour tout couple $(i,j)$). En déduire un algorithme de décomposition d'une matrice bistochastique en somme de permutations. Implémenter cet algorithme et l'utiliser sur une matrice produite par une simulation issue de la première question.

# Références

[1] Michael Evans and Tim Swartz : *"Approximating Integrals via Monte Carlo and Deterministic Methods"*, Oxford Statistical Science Series.

[2] J.G. Propp and D.B. Wilson : *"Exact Sampling with Coupled Markov Chains and Applications to Statistical Mechanics"*