Quizz 1

Telecom ParisTech

24 Septembre 2010

1. Soient X et Y deux variables aléatoires entières sur un espace Ω dénombrable muni d'une probabilité P. On suppose que X et Y sont indépendantes.
   Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{N}$. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
2. Soit $n \geq 1$ un entier. Deux joueurs utilisent un dé à n faces (numérotées $1, 2, \ldots, n$) pour jouer au jeu suivant :
   - le joueur A lance le dé, obtient le résultat X, et verse 3 euros au joueur B ;
   - le joueur B lance alors le dé jusqu'à ce qu'il obtienne une valeur supérieure ou égale à X (la partie s'arrête alors) ; à chaque lancer, il donne 1 euro au joueur A.

   On note Y la somme versée au cours de la partie par le joueur B au joueur A.

   (a) Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ et $j \in \mathbb{N}^*$, que vaut $\mathbb{P}(Y = j \mid X = k)$?

   (b) Montrer que si Z est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, d'espérance finie, alors
   $$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Z \geq k) \ .$$

   (c) En déduire un encadrement simple de $\mathbb{E}[Y]$ en fonction de n, de même qu'un équivalent lorsque $n \to \infty$.

   (d) Selon la valeur de n, à quel joueur le jeu est-il favorable ? Sans calculette, on pourra utiliser les approximations $e^2 \approx 7.39$ et $e^3 \approx 20.09$.
3. Soient $p, q \in]0, 1[$ et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur Ω, telle que $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(q)$. Quelle est la loi de $Z = \min(X, Y)$?