Probabilités - Rattrapage Quizz 1

Telecom ParisTech Groupe F - Garivier

5 décembre 2011

Exercice 1

Soit N le nombre (aléatoire) de champignons ramassés par un cueilleur durant une période fixée. On suppose que N est une v.a. à valeur dans $\mathbb{N}_\star$, de fonction génératrice G.

Chaque champignon est comestible avec probabilité p $(0 < p < 1)$: il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une famille de v.a. $\{X_k, k \geq 1\}$ sur cet espace tel que

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si champignon } k \text{ est comestible} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose que les v.a. $\{N, X_k, k \geq 1\}$ sont (mutuellement) indépendantes. On pose $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$.

1. Que représente S ?
2. Donner l'expression de la fonction génératrice de S en fonction de G et p.
3. En déduire la probabilité que *tous les champignons ramassés soient comestibles* en fonction de G et p.

Exercice 2

On considère une suite de parties indépendantes de "pile" et de "face": pour chaque partie, on obtient "pile" avec probabilité p (pour $0 < p < 1$). On s'intéresse aux temps successifs où l'on obtient "pile". Pour ce faire, on définit une suite de v.a. $\{X_k, k \geq 1\}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes telles que

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient "pile" au lancer } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et on définit les v.a. $\{T_j, j \geq 1\}$ par

$$T_1 = \inf\{k \geq 1 \ : X_k = 1\}, \qquad T_j = \inf\{k > T_{j-1} \ : X_k = 1\} \text{ pour } j \geq 2.$$

1. Quelle est la loi du premier instant T_1 où on obtient "pile" ?
2. Montrer que $(T_1, T_2 - T_1, \cdots, T_j - T_{j-1})$ sont des v.a. indépendantes et de même loi.

3. On définit $N_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ le nombre de piles obtenus jusqu'à la date n, de sorte que T_{N_n} est l'instant d'arrivée du dernier "pile". Par convention, $T_0 = 0$. On pose

$$U_n = n - T_{N_n} \qquad\qquad V_n = T_{N_n+1} - n.$$

de sorte que $U_n \in \{0, \cdots, n\}$ et $V_n \geq 1$.

a. Montrer que pour tout $j \geq 0$ et pour tout $i \in \{0, \cdots, n-1\}$,

$$\mathbb{P}\left(U_n > i, V_n > j\right) = (1-p)^{i+j+1}, \qquad\qquad \mathbb{P}(U_n = n) = (1-p)^n.$$

b. En déduire la loi de U_n.

c. En déduire la loi de V_n.

d. Vérifier que l'espérance de $U_n + V_n$ est strictement supérieure à l'espérance de $T_2 - T_1$.