Quizz n°2 - Probabilités

On rappelle que la fonction Γ est définie pour $\alpha > 0$ par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx,$$

et que la loi Gamma de paramètres $\theta > 0$ et $\alpha > 0$, notée loi $\Gamma(\theta, \alpha)$, a pour densité

$$f(x) = \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\theta x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x).$$

Ex.1 Soit α, β et θ trois nombres réels stricement positifs, et soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes construites sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que X suit la loi $\Gamma(\theta, \alpha)$, et que Y suit la loi $\Gamma(\theta, \beta)$. On pose $R = X/(X+Y)$ et $S = X + Y$.

(a) Quelle est la loi du couple (R, S) ?

(b) En déduire que

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta).}$$

(c) Quelle est la loi de S ? Que vaut l'espérance de R ?

(d) Les variables R et S sont-elles indépendantes ?

Ex.2 Soit $Z_1, Z_2, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi. On suppose que $\mathbb{E}[Z_1^2] < \infty$.

(a) Pourquoi $\mu = \mathbb{E}[Z_1]$ est-elle bien définie ?

(b) On pose

$$\Sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (Z_i - \mu)^2.$$

Etudier la convergence de la suite $(\Sigma_n^2)_{n \geq 1}$.