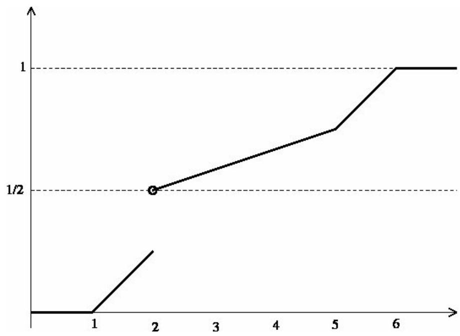
Probabilités - Quizz 2

Telecom ParisTech Groupe 5 - Garivier

4 janvier 2012

Exercice 1



La figure ci-contre représente de graphe de la fonction de répartition d'une variable aléatoire X. Répondre par Vrai ou Faux à chacune des questions suivantes (justifier en une phrase) :

1. X suit la loi uniforme sur $[0, 6]$
2. X est une variable continue
3. X est une variable discrète
4. $P(X = 2) = 1/4$
5. $P(X = 5) = 3/4$
6. $P(2 < X \leqslant 5) = 1/4$
7. $\mathbb{E}[X] = 1$
8. $\mathrm{Var}[X] = 36$

Exercice 2

Mr D. s'impatiente à l'arrêt de l'autobus. Il décide de prendre un taxi s'il en arrive un avant l'autobus. Soit X la v.a. donnant le temps d'arrivée en minutes du prochain autobus, et Y du prochain taxi. On suppose que X et Y sont indépendantes, que Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1/5$ et que X est une v.a. discrète prenant trois valeurs

$$P(X = 5) = 1/4 \qquad P(X = 15) = 1/2 \qquad P(X = 25) = 1/4.$$

1) Quelle est la probabilité pour que Mr D. attende plus de dix minutes ?
2) Quelle est la probabilité pour que Mr D. prenne un taxi plutôt qu'un bus ?
3) Quelle est la probabilité pour que Mr D. prenne un taxi plutôt que l'autobus, si l'on sait en outre qu'il a attendu plus de dix minutes ?

Exercice 3

1. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ soit $p \in [0,1]$, et soit $X = \mathbb{I}\{U \leqslant p\}$. Quelle est la loi de X ?
2. Soient $p, q \in [0,1]$ tels que $p < q$, soit n un entier strictement positif, soit $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et soit $Y \sim \mathcal{B}(n,q)$. Montrer que pour tout $k \in \{1,\ldots,n\}$, $P(X \leqslant k) \geqslant P(Y \leqslant k)$.
3. Soit $\lambda < \mu$ deux réels positifs, soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et soit $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. Montrer que pour tout entier positif k, $P(X \leqslant k) \geqslant P(Y \leqslant k)$.

Exercice 4

Castor et Pollux se sont donnés rendez-vous en convenant de ne pas attendre l'autre plus de dix minutes. Ils arrivent tous les deux indépendamment à un instant ¡¡ au hasard ¿¿ entre midi et 13 heures. On note X, respectivement Y, l'heure d'arrivée de Castor, respectivement celle de Pollux. On note W le temps d'attente de Castor.

1. Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?
2. Exprimer en fonction de X et Y, la valeur du temps d'attente de Castor. On pourra utilement faire un dessin en identifiant dans le pavé $[0,1] \times [0,1]$, différentes zones où l'expression de W est simple – voir Figure 1.

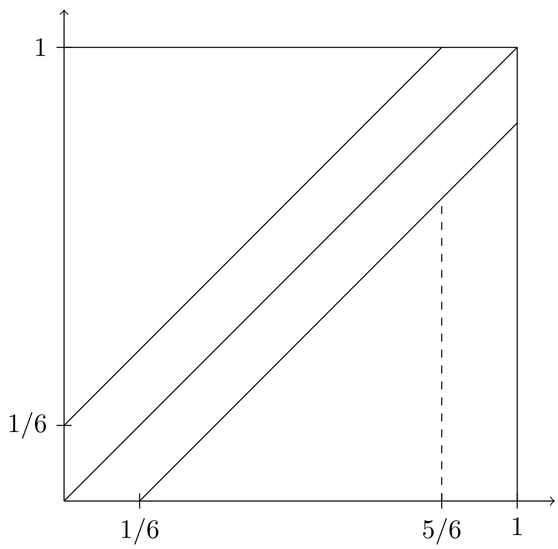


Figure 1 – Castor et Pollux

3. Quelle est la loi du temps d'attente de Castor ?
4. Quel est le temps d'attente moyen de Castor ?
5. Quelle est la loi du temps d'attente de Castor sachant qu'il y a rencontre ?